

# Cours de Métrologie

Abdeslam Hoummada (hoummada@cern.ch)

Master IISPHE <http://ruphe.fsac.ac.ma>

Faculté des Sciences Aïn Chock

Année 2011-2012

# Chapitre I : Probabilités

## INTRODUCTION

# Chapitre I : Probabilités

## INTRODUCTION

Grandeurs discrètes et continues

# Définitions et propriétés

## INTRODUCTION

Grandeurs discrètes et continues

# INTRODUCTION

Supposons qu'on observe un événement  $E$  répété  $N_e$  fois. Dans  $n$  cas cet événement est caractérisé par une marque distinctive  $a$  (appelé aussi caractère). Si les résultats des événements dans cette suite sont indépendants, alors la probabilité  $P(a)$  que la marque se manifeste est définie comme.

$$P(a) = \lim_{N_e \rightarrow \infty} \frac{n}{N_e}$$

Par conséquent la probabilité varie de 0 à 1.

$$0 \leq P(a) \leq 1$$

La somme sur tous les caractères possibles  $\{i\}, i = a, b, c, \dots$

$$\sum_i P(i) = 1$$

## Caractéristiques d'une variable aléatoire

les variables aléatoires, les prédictions théoriques des mesures des observables physiques :

- ▶ masse d'une particule instable
- ▶ nombre d'événements d'une décroissance de  $N_0$  particules instables (à  $t = 0$ ) sur  $\Delta t$

Une variable aléatoire  $x$  est caractérisée par sa densité de probabilité  $f(x)$

# Définitions et propriétés

INTRODUCTION

Grandeurs discrètes et continues

## Grandeurs discrètes et continues

Une grandeur physique peut avoir une valeur numérique discrète ou continue. Une grandeur discrète tendra vers une grandeur continue  $f(x)$  pour un nombre infini de mesures.

La forme des histogrammes tendra vers une forme en cloche. Ainsi le produit  $f(x)dx$  donne la probabilité pour que la grandeur mesurée se trouve dans l'intervalle de  $x$  à  $x + dx$ . La fonction  $f(x)$  représente la densité de probabilité. On l'appelera aussi la fonction de distribution de probabilité. La probabilité de trouver la valeur dans l'intervalle compris entre  $x_1$  et  $x_2$  est :

$$P = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Pour une grandeur discrète :  $\{x_1, x_2, x_3; \dots; x_N\}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i$$

$$P(i) = \frac{n_i}{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^N P(x_i) = 1$$

Moyenne géométrique :

$$\sqrt[N]{x_1 x_2 x_3 \dots x_N}$$

Moyenne harmonique :

$$\frac{N}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_N}}$$

r.m.s : root mean square :  $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2}{N}}$

## Propriétés des fonctions de distribution

Valeur moyenne :

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i)$$

l'étalement de la distribution peut être décrit par la variance ou le carré de l'écart-type

$$D = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = V(x)$$

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2 P(x_i) = V(x)$$

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = V(x)$$

Déviatiun standard :

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_i x_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Fonctions de distribution de plusieurs variables :

$$P = f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\text{condition de normalisation : } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

Au cas où les deux variables  $x_1$  et  $x_2$  sont indépendantes :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

Chaque fonction représente la densité de probabilité de la variable correspondante. La valeur moyenne de la somme des deux variables est :

$$\overline{x_1 + x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2) f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 + x_2) f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) dx_2 + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_2(x_2) dx_2 \\
&= \bar{x}_1 + \bar{x}_2
\end{aligned}$$

La somme des deux valeurs moyennes, pour la variance on procède :

$$\begin{aligned}
D_{x_1+x_2} &= \sigma_{x_1+x_2}^2 = \overline{(x_1 + x_2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2))^2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \bar{x}_1 + x_2 - \bar{x}_2)^2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + (x_2 - \bar{x}_2)^2] f(x_1, x_2) dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{x_1+x_2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \bar{x}_1)^2 f_1 dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 dx_2 \\
 &+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \bar{x}_1) f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - \bar{x}_2) f_2(x_2) dx_2 \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x_2 - \bar{x}_2)^2 f_2(x_2) dx_2 \\
 &= \sigma_{x_1}^2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot \sigma_{x_2}^2
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$D_{x_1+x_2} = \sigma_{x_1+x_2}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 = D_{x_1} + D_{x_2}$$

La variance de la somme de deux grandeurs indépendantes est égale à la somme de leur variance.

Pour N grandeurs indépendantes :

$$f(x_1, x_2, x_3; \dots; x_N) = \prod_{i=1}^{i=N} f_i(x_i)$$

on introduit la somme :  $X = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N$

$$\bar{X} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_N$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + \cdots + \sigma_{x_N}^2$$

## Distribution de Gauss ou distribution normale

La densité de probabilité  $f(x)$  de trouver la valeur physique aléatoire  $x$  pour une distribution normale est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

Les deux paramètres sont :  $\mu$  et  $\sigma$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-y^2] dy = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
 &\quad + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 0 + 1 \cdot \mu = \mu
 \end{aligned} \tag{3}$$

$\mu$  est la valeur moyenne de  $x$ ,  $x = \mu$  est le maximum de la fonction  $f(x)$ , cette distribution est symétrique par rapport à ce point.

Variance de la distribution :

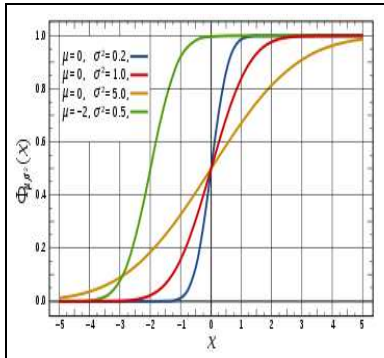
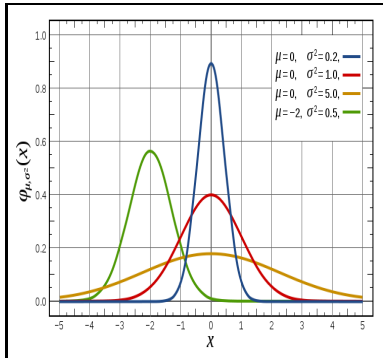
$$\begin{aligned}
 D &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\bar{x})^2 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \\
 &= 2\sigma^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp[-y^2] dy = \sigma^2
 \end{aligned} \tag{4}$$

La plupart des grandeurs physiques peuvent être décrites par cette distribution, les résultats expérimentaux peuvent être caractérisés par deux valeurs seulement.  $x_{exp} = \bar{x} \pm \Delta x = \mu \pm \sigma$  Probabilité pour trouver une valeur dans un intervalle donné :

$$P[\mu - \sigma, \mu + \sigma] \approx 68.3\%$$

$$P[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] \approx 95.4\%$$

$$P[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] \approx 99.7\%$$



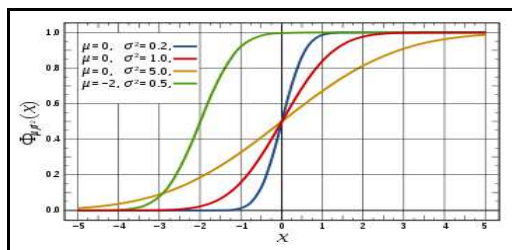
## Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $x$  est la probabilité que  $x$  soit inférieure à une valeur  $a$ :

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

ou pour une valeur discrète :

$$F(a) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad \text{avec} \quad x_i \leq a$$



## Distribution binomiale

Décrit des grandeurs discrètes qui ne peuvent prendre que deux valeurs. Supposons qu'un événement ait deux réalisations possibles A et B. Soient  $p$  la probabilité de la réalisation de A,  $q = 1 - p$  est la probabilité de réalisation de B. Si cet événement se repète  $N$  fois on peut déterminer la probabilité  $P_N(n)$  que la réalisation A se produise  $n$  fois. La probabilité d'obtenir successivement  $n$  fois la réalisation A, puis  $N - n$  fois la réalisation de B est égale à  $p^n q^{N-n}$ . Vu que l'ordre de réalisation de A et B est sans importance, il faut multiplier cette probabilité par le nombre de possibilités d'extraire  $n$  objets parmi  $N$  objets, c'est à dire par :

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Finalement la probabilité  $P_N(n)$  que la réalisation A se produise  $n$  fois est égale :

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

Cette densité de probabilité est celle de la distribution binomiale. Elle est caractérisée par deux paramètres  $N$  et  $p$ .

Exemple : Considérons  $N$  particules d'un gaz sans interaction distribuées uniformément dans un volume  $V$ . Chaque particule a une position aléatoire dans ce volume et a une probabilité  $p = \frac{v}{V}$  de se manifester dans une partie  $v$  du volume  $V$ . Dans ces conditions la probabilité  $P_N(n)$  de trouver  $n$  particules dans  $v$  est donnée par la formule ci dessus. Elle est normée :

$$\sum_{n=0}^N P_N(n) = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = [p + (1-p)]^N = 1^N = 1$$

$$\text{formule du binôme : } \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (p + q)^N$$

Le terme avec  $n = 0$  est nul et en posant  $k = n - 1$ ,

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^N n P_N(n) = \sum_{n=1}^N n P_N(n) = Np [p + (1-p)]^{N-1} = Np$$

Si on a  $p$  d'avoir  $A$ , pour  $N$  réalisations on a :  $\bar{n} = Np$

Calcul de l'écart-type :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \sum_{n=0}^N n^2 P_N(n) - (Np)^2 \\ &= N(N-1)p^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p) \\ \sigma &= \sqrt{Np(1-p)}\end{aligned}$$

La valeur moyenne est proportionnelle au nombre de mesures :  $\bar{n} \propto N$ , tandis que l'écart-type est proportionnel à la racine de  $N$  :  $\sigma \propto \sqrt{N}$  : la valeur moyenne est associée à une grandeur physique  $x_{exp}$  et l'écart-type est associé à son incertitude  $\Delta x$ . L'incertitude relative est :  $\delta = \frac{\Delta x}{x_{exp}} = \frac{\sigma}{\bar{n}}$  qui est inversement proportionnelle au nombre de mesures  $N$  :  $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$ . Plus on fait de mesures plus la précision est grande.

## Distribution de Poisson

Prenons dans le cas d'une distribution binomiale un grand nombre de mesures  $N$ , considérons la limite quand  $N \rightarrow \infty$  et en imposant que le produit  $Np$  reste constant  $Np = \text{const} = \mu$  c'est à dire  $p \rightarrow 0$ .  
On veut trouver la probabilité

$$P_{\mu}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, Np = \mu} \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

et du fait  $p = \frac{\mu}{N}$

$$P_{\mu}(n) = \frac{\mu^n}{n!} \lim_{N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, Np = \mu} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} (1-p)^{N-n}$$

$$\frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = 1\left(1 - \frac{1}{N}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{N}\right) \rightarrow 1$$

Lorsque  $N \rightarrow \infty$  On peut écrire :

$$(1-p)^{N-n} = \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-n} = \frac{\left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N}{\left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^n}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^N = \exp[-\mu]$$

$$\text{Finalement : } P_N(n) = \frac{\mu^n}{n!} \exp[-\mu]$$

$$\text{Normalisation : } \sum_{n=0}^{\infty} P_{\mu}(n) = \exp[-\mu] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} = \exp[-\mu] \cdot \exp[+\mu] = 1$$

$$\text{Moyenne : } \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_{\mu}(n) = \exp[-\mu] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} = \exp[-\mu] \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k)!} = \mu$$

Variance :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{n(n-1)} + \bar{n} - \bar{n}^2 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) P_{\mu}(n) + \mu - \mu^2 = \exp[-\mu] \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-2)!} + \mu - \mu^2 \\ &= \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu \end{aligned}$$

Cette distribution de probabilité est souvent rencontrée en physique nucléaire et en physique des particules, le nombre de particules comptées par un détecteur est distribué selon cette loi à condition que le flux de particules reste constant.

Exemple : Supposons qu'à l'aide d'un détecteur on compte des particules et que l'on enregistre leur nombre pendant une certaine durée, disons une seconde. Ces mesures seront décrites par la distribution de poisson. Pour le vérifier, divisons notre intervalle de temps (de 1s) en  $N$  petits sous intervalles, disons de 1 nanoseconde ( $1\text{ns} = 10^{-9}\text{s}$ ). Supposons que le nombre moyen de particules enregistrées pendant 1 seconde est égal à  $\mu = 8$ . Alors la probabilité de détection d'une particule dans un sous intervalle est égale à  $p = \frac{\mu}{N} = 8 \cdot 10^{-9}$ . Il est important que cette valeur soit faible pour que l'on puisse négliger la probabilité de détection de deux particules dans un même sous intervalle de temps. En principe, c'est une distribution binomiale où la réalisation  $A$  est l'apparition d'une particule dans le détecteur et la réalisation de  $B$  est alors son absence. Les conditions de la limite ( $N \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, Np = \text{const}$ ) sont satisfaites ( $N = 10^9, p = 8 \cdot 10^{-9}, Np = 8$ ) et la distribution devient une distribution de poisson avec une moyenne  $\mu = 8$ .

$$P_8(n) = \exp[-8] \frac{8^n}{n!}$$

$n$  est le nombre de particules détecté pendant une seconde.  
Cet exemple montre un passage entre différentes distributions. On a remplacé une distribution à deux paramètres (binomiale) par une distribution de poisson à un paramètre.

Distribution Binomiale

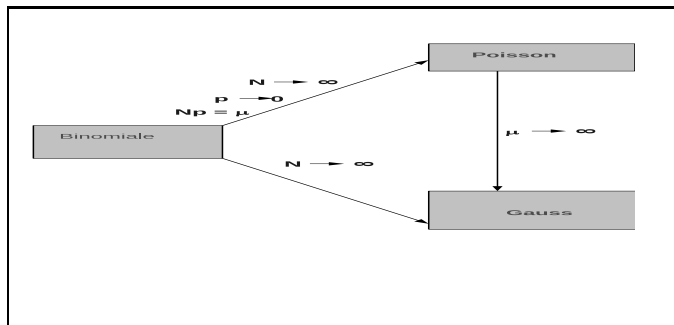
```
TH1F *h2 = new TH1F("h2", "my histogram", 100,0,20);
for (Int_t i=0;i<10000;i++)
h2->Fill(gRandom->Binomial(10,0.7));
h2->Draw();
```

Distribution Gauss

```
for (Int_t i=0;i<10000;i++)
h2->Fill(gRandom->Gaus(10,0.7));
```

Distribution Poisson

```
for (Int_t i=0;i<10000;i++)
h2->Fill(gRandom->Poisson(8));
```



## Example

On essaye de mesurer la trace des rayons cosmiques dans une chambre à étincelles, d'efficacité 95%. Trois points au moins sont nécessaires pour dfinir la trace. Quelle est l'efficacité d'une pile de 3, 4 ou 5 chambres ?

$$P(3; 0.95, 3) = 0.95^3 = 0.857 = 85.7\%$$

$$P(3; 0.95, 4) + P(4; 0.95, 4) = 0.171 + 0.815 = 0.986 = 98.6\%$$

$$P(3; 0.95, 5) + P(4; 0.95, 5) + P(5; 0.95, 5) = 0.021 + 0.204 + 0.774 = 0.999 = 99.9\%$$

## Théorème Central Limit

Ce théorème affirme que dans presque toutes les expériences on peut travailler avec une distribution de Gauss.

### Theorem

*Soit  $x$  une grandeur physique aléatoire avec une moyenne  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$ . Si  $\sigma^2$  **est fini**, alors la distribution de la valeur moyenne sur un grand nombre  $n$  de mesures ( $n \rightarrow \infty$ ) tend vers une distribution de Gauss avec une moyenne  $\mu$  et une variance  $\frac{\sigma^2}{n}$ .*

Ce théorème établit que la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même moyenne  $\mu$  et la même variance finie  $\sigma$  tend vers une Gaussienne lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### Theorem

*Si une grandeur physique subit l'influence d'un nombre important de facteurs indépendants et si l'influence de chaque facteur pris séparément est petite, alors la distribution de cette grandeur est une distribution de Gauss.*

Une expérience de physique donne un nombre fini de mesures. cet ensemble de résultats  $x_i$  s'appelle un échantillon. Comment à partir de ces résultats obtenir des informations sur la valeur moyenne  $\mu$  et sur la variance  $\sigma^2$  ? La valeur qui remplace la moyenne  $\mu$  peut être construite simplement comme la moyenne arithmétique de tous les résultats  $x_i$  :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

C'est la moyenne estimée ou la moyenne expérimentale pour la distinguer de la vraie valeur moyenne  $\mu$  que nous appellerons aussi la moyenne théorique.

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = \mu$$

$$\sigma_m^2 = \overline{(m - \mu)^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{(x_i - \mu)(x_j - \mu)} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\text{La variance : } V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

La variance varie en  $\frac{1}{n}$  et la déviation standard varie comme  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , l'erreur sur la mesure ou sur la moyenne est  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  en faisant  $n$  mesures l'erreur  $\sigma$  est réduite du facteur  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

### Exemple

La résolution en énergie d'un détecteur  $\gamma$  est de  $50\text{keV}$ , Si un seul gamma est observé son énergie est connue avec une erreur de  $50\text{keV}$ . Si on mesure 100 raies gamma de même énergie l'erreur est de  $\frac{50\text{keV}}{\sqrt{100}} = 5\text{keV}$  pour avoir  $1\text{keV}$  il faut avoir une statistique de 2500 gammas.

Supposons nous avons un échantillon de mesures  $x_i$  d'une quantité  $\mu$ , ces mesures ont différents erreurs  $\sigma_i$ . Pour avoir l'erreur moyenne, et les meilleures mesures, celles avec les plus petites erreurs ( $\sigma_i$ ), auront des poids plus forts, par contre les mesures moins précises avec de larges erreurs ( $\sigma_i$ ) auront des poids plus faibles.

## Example

voltmètre 1 : 3.11 V erreur : 0.02 et voltmètre 2 : 3.13 V erreur 0.01, comment combiner ces deux mesures ?

si on avait pris 4 mesures avec le voltmètre de résolution 0.02 :

l'erreur serait  $\frac{0.02}{\sqrt{4}} = 0.01$  Par conséquent 4 mesures équivalentes à une seule avec l'autre voltmètre. Une bonne mesure est équivalente à 4 mauvaises mesures :

$$\bar{V} = \frac{1}{5} \times 3.11 + \frac{4}{5} \times 3.13 = 3.126 \text{ Volts}$$

l'erreur  $\frac{0.02}{\sqrt{5}} = 0.009$

la valeur moyenne dans le cas de plusieurs mesures de la même quantité chacune avec une erreur  $\sigma_i$  est donnée par :

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

## Combinaison des erreurs :

Supposons une fonction  $f = ax + b$  avec  $x$  ayant une certaine distribution avec une variance  $V(x)$  et une certaine déviation standard  $\sigma_x$ .  $x$  représente une mesure ou un résultat intermédiaire et  $f$  le résultat final : La variance de  $f$  est donnée par

$$\begin{aligned} V(f) &= \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 = \langle (ax + b)^2 \rangle - \langle ax + b \rangle^2 \\ &= a^2 (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) = a^2 V(x) \end{aligned}$$

en terme de déviation standard :  $\sigma_f = |a|\sigma_x$

Considérons le cas où  $f$  est une fonction de  $x$ . Pour de faibles variations on peut faire un développement de Taylor autour d'un point  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left( \frac{df}{dx} \right) \Big|_{x=x_0}$$

$$V(f) \approx \left( \frac{df}{dx} \right)^2 V(x)$$

$$\sigma_f \approx \left| \frac{df}{dx} \right| \sigma_x$$

Supposons  $f$  soit du type :

$$f = ax + by + c$$

$$V(f) = a^2 (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) + b^2 (\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2) + 2ab (\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle) = a^2 V(x) + b^2 V(y) + 2ab \cdot \text{cov}(x, y)$$

Pour une fonction plus général  $f(x, y)$  :

$$V(f) = \left( \frac{df}{dx} \right)^2 V(x) + \left( \frac{df}{dy} \right)^2 V(y) + 2 \left( \frac{df}{dx} \right) \left( \frac{df}{dy} \right) \text{cov}(x, y)$$

$$\sigma_f^2 = \left( \frac{df}{dx} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{df}{dy} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left( \frac{df}{dx} \right) \left( \frac{df}{dy} \right) \rho \sigma_x \sigma_y$$

Si  $x$  et  $y$  sont indépendantes :

$$V(f) = \left( \frac{df}{dx} \right)^2 V(x) + \left( \frac{df}{dy} \right)^2 V(y)$$

$$\sigma_f^2 = \left( \frac{df}{dx} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{df}{dy} \right)^2 \sigma_y^2$$

## Example

Si un mobile a une vitesse de  $200 \pm 10m/s$  et une accélération de  $12 \pm 2m/s^2$  en 6 s il parcourt une distance de 1416m suivant la trajectoire  $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ . Il y a alors une erreur de  $\pm 60m$  dûe à l'erreur sur la vitesse et une erreur de  $\pm 36m$  dûe à l'erreur sur l'accélération : L'erreur globale par somme quadratique est de  $\pm 70m$ .