

Accélérateurs de Particules

Pour une bonne part, l'essor de la physique des hautes énergies durant la seconde moitié du vingtième siècle est due aux progrès remarquables accomplis dans les techniques de l'accélération des particules chargées. Ce sont les accélérateurs de particules qui fixent actuellement les limites des énergies accessibles à grande luminosité :

Tevatron, Fermilab (USA)	$\sqrt{s}=1,8 \text{ TeV}$, $p\bar{p}$
LEP200, CERN	$\sqrt{s}=216 \text{ GeV}$, e^-e^+
HERA, DESY (Allemagne)	$\sqrt{s}=332 \text{ GeV}$, ep

Pour mieux apprécier ce que l'on entend par haute énergie, on peut calculer la puissance du faisceau aux points de collision à LEP200. La puissance transportée par un faisceau de particules portant chacune une énergie cinétique E et produisant un courant total moyen I est donnée par :

$$P(\text{MW}) = E(\text{GeV}) \times I(\text{mA})$$

$$\text{ce qui pour LEP200 conduit à : } P_{\text{LEP200}} = 216 \times 4 = 864 \text{ MW} .$$

C'est approximativement la puissance électrique produite par une centrale nucléaire ! Cependant, une fraction infime de cette puissance est consommée par les collisions e^+e^- .

Ce cours exposera les notions fondamentales qui permettent de comprendre le fonctionnement et les limitations des diverses machines: cyclotron, linac, synchrotron...

1 Principes fondamentaux :

1.1 Équations de Maxwell :

Les accélérateurs de particules mettent en œuvre les lois fondamentales de l'électromagnétisme. Dans le système MKS, les équations de Maxwell sont :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & , & & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & , & & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \rho \vec{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \end{aligned}$$

où :

ρ représente la densité de charges source ,

\vec{v} est la vitesse des charges source ,

\vec{E}, \vec{B} sont les champs électrique et magnétique externes

$$\text{et } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad , \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ F/m} .$$

\vec{E} et \vec{B} dérivent d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur à travers les expressions suivantes:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(V) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad ,$$

avec :

$$v(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (\text{pour les calculs statiques uniquement})$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$(V, c\vec{A})$ forme le quadrivecteur potentiel .

1.2 Force de Lorentz :

C'est cette force qui est à la base de l'accélération et du guidage d'un faisceau de particules. Pour une charge q animée d'une vitesse \vec{v} dans un champ électromagnétique, elle s'exprime par :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad .$$

Ainsi, la variation de la quantité de mouvement d'une charge mobile soumise à cette force est :

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt \quad ,$$

son gain en énergie cinétique étant :

$$\Delta E_{cin} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \text{avec} \quad d\vec{s} = \vec{v} dt \quad .$$

On a :

$$\Delta E_{cin} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{s} + q \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \quad \text{dans laquelle on peut aisément réaliser que le deuxième terme}$$

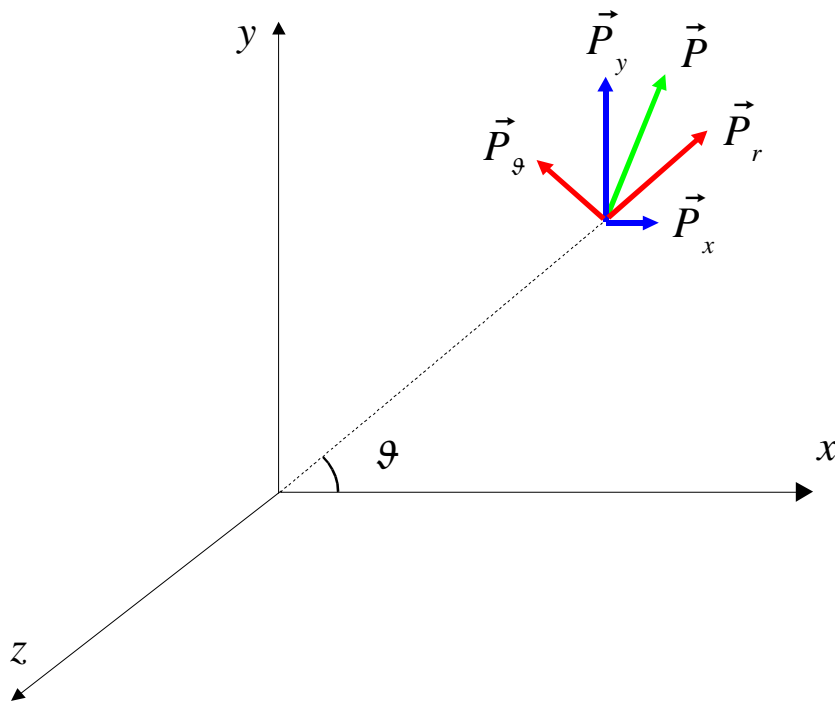
est nul . On obtient finalement :

$$\Delta E_{cin} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad .$$

“L'accélération” (gain en énergie) d'une particule chargée est toujours produite par un champ électrique. La première composante de la force de Lorentz est une force “accélératrice” qui ne dépend pas de la vitesse de la particule . La deuxième composante de la force de Lorentz (appelée par ailleurs force de Laplace) dépend de la vitesse. Elle est normale à \vec{v} et \vec{B} et elle n'induit pas de changement d'énergie cinétique. C'est une force défléchissante que l'on utilise pour le guidage des faisceaux.

2 Équations relativistes du mouvement d'une particule en coordonnées cylindriques :

En coordonnées cartésiennes on a : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$



$$x = r \cos \vartheta \quad , \quad y = r \sin \vartheta \quad , \quad z = z$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad , \quad \vartheta = \text{tg}^{-1}(y/x)$$

L'axe z restant inchangé, on obtient : $\frac{d p_z}{d t} = F_z$

En revanche sur l'axe x, on a : $\frac{d p_x}{d t} = F_x$, avec $P_x = P_r \cos \vartheta - P_\vartheta \sin \vartheta$, $F_x = F_r \cos \vartheta - F_\vartheta \sin \vartheta$

soit : $\dot{p}_r \cos \vartheta - p_r \sin \vartheta \dot{\vartheta} - \dot{p}_\vartheta \sin \vartheta - p_\vartheta \cos \vartheta \dot{\vartheta} = F_r \cos \vartheta - F_\vartheta \sin \vartheta$.

C'est une équation du type $A \cos \vartheta + B \sin \vartheta = 0$ qui doit être satisfaite quel que soit ϑ , ce qui implique que :

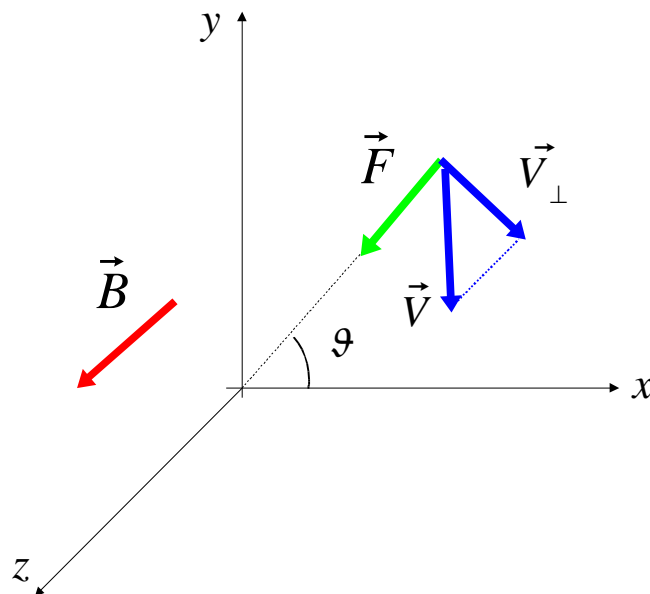
$$A=0 \Rightarrow \dot{p}_r = F_r + p_\vartheta \dot{\vartheta} \quad , \text{équation radiale}$$

$$B=0 \Rightarrow \dot{p}_\vartheta = F_\vartheta - p_r \dot{\vartheta} \quad , \text{équation azimutale}$$

$p_\vartheta \dot{\vartheta}$ est la force centrifuge avec $P_\vartheta = \gamma m_0 v_\vartheta$ et $\dot{\vartheta} = \frac{v_\vartheta}{r}$, soit encore: $P_\vartheta \dot{\vartheta} = \gamma m_0 \frac{v_\vartheta^2}{r}$.

$-p_r \dot{\vartheta}$ est la force de Coriolis qui s'exprime par : $-p_r \dot{\vartheta} = -\gamma m_0 \frac{v_r v_\vartheta}{r}$

2.1 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme :



La force qui est appliquée à la charge q est : $\vec{F} = q \vec{V} \times \vec{B}$. \vec{B} étant parallèle à l'axe $(0, z)$, ceci implique que $F_z = 0$, ou encore que le mouvement est uniforme selon cet axe . La force de Laplace peut se simplifier sous la forme de : $\vec{F} = q \vec{V}_\perp \times \vec{B}$ dans laquelle \vec{V}_\perp est la projection de \vec{V} sur le plan $(0, x, y)$. Puisque cette force ne provoque aucun accroissement de l'énergie cinétique de q , on obtient $V_\perp = cte$. \vec{F} reste à tout instant perpendiculaire à \vec{V}_\perp . Il résulte de ces considérations que le mouvement de q dans le plan (x, y) est circulaire uniforme et que \vec{F} est une force centripète. Si l'origine de notre repère est choisie au centre de l'orbite, on a : $v_r = 0$ et $\dot{p}_r = 0$, ce qui considéré dans l'équation radiale du mouvement de q donne :

$$q V_\perp B = \gamma m_0 \frac{V_\perp^2}{r}$$

$$q B = \gamma m_0 \frac{V_\perp}{r} \quad \text{où } r \text{ est le rayon de courbure de l'orbite .}$$

$$P_\perp = q B r$$

Soit encore : $P_\perp (\text{GeV}) = 0,3 z B (\text{T}) r (\text{m})$ dans laquelle z et l'état de charge de q ($q = Ze$) .

La fréquence de rotation du mouvement s'obtient par :

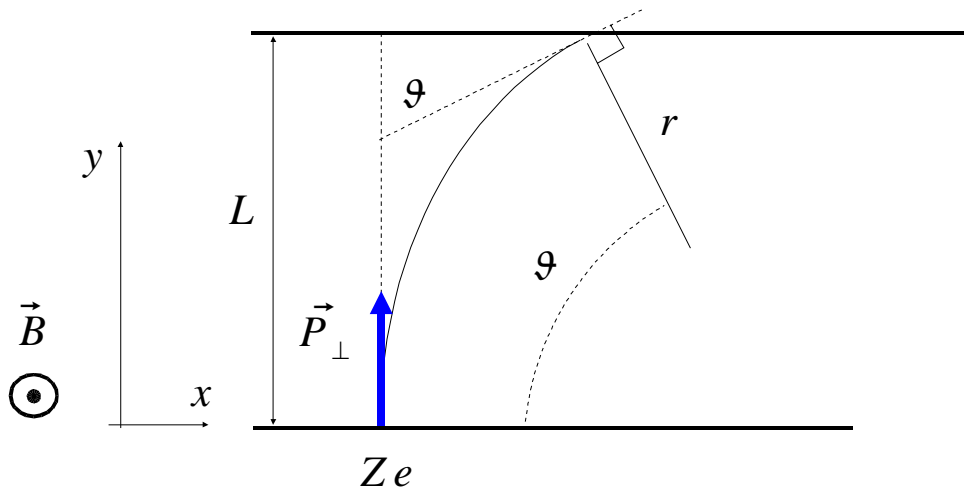
$$\dot{\vartheta} = \frac{V_{\perp}}{r} = \frac{q B}{\gamma m_0} .$$

Le mouvement combiné de q dans l'espace à 3 dimensions est une hélice qui a pour pas:

$$p^h = \frac{2\pi}{\dot{\vartheta}} \cdot V_z = \frac{2\pi \gamma m_0}{q B} \frac{P_z}{\gamma m_0} \Rightarrow p^h = \frac{2\pi P_z}{q B} .$$

Soit encore : $P_z (\text{GeV}) = \frac{0,3}{2\pi} z B (\text{T}) p^h (\text{m}) .$

Calculons maintenant l'angle de déflexion ϑ d'une particule traversant une zone de champ uniforme d'une profondeur L :



$$\sin \vartheta = \frac{L}{r} = 0,3 z \frac{B (\text{T}) L (\text{m})}{P_{\perp} (\text{GeV})}$$

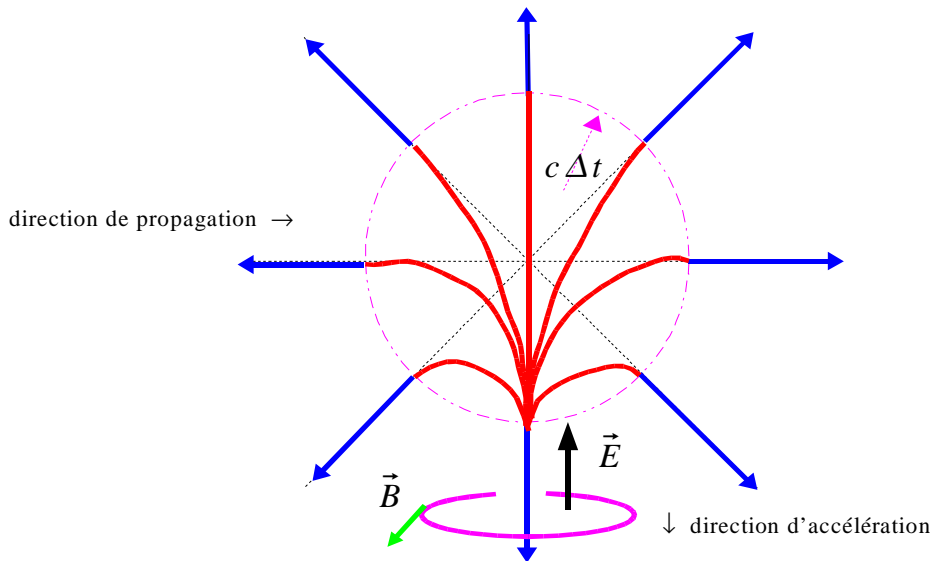
Application : Aimants dipolaires du LHC

On désire maintenir sur une orbite circulaire de 26 659 m de circonférence un faisceau de protons de 7 TeV en énergie. La machine a nécessairement une structure polygonale. Elle possède un dipôle magnétique par côté de ce polygone. Le nombre de côtés du polygone, ou de dipôles, est : $N=1232$, ceci implique que l'angle de déflexion par côté doit être: $\vartheta = \frac{2\pi}{1232}$. Ces aimants doivent donc fournir un produit $B L = 119 \text{ T m}$. Les dipôles du LHC seront supraconducteurs, bobinés à partir de conducteur en N_b-T_i . Ils seront refroidis à la température de 1,9 K par de l'hélium liquide superfluide. Ils délivreront un champ de 8,4 T sur une longueur de 14,2 m. La couverture de la machine (pourcentage de la circonférence de l'orbite des faisceaux équipée d'aimants) sera de 65,5 %.

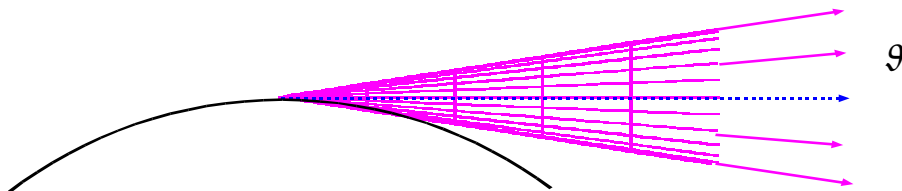
2.2 Rayonnement synchrotron :

Physiquement, le rayonnement synchrotron est une conséquence du fait que la vitesse de la lumière est finie.

Une charge ponctuelle en mouvement uniforme, observée dans son référentiel propre, produit un champ radial de Coulomb. Pour $\Delta t \geq 0$, la charge est accélérée perpendiculairement à sa direction de propagation (particules dans un champ magnétique uniforme).



Du fait de la vitesse finie de la lumière, les lignes de champ sont perturbées sur une sphère de rayon $c \Delta t$. Il y a apparition d'une nouvelle composante longitudinale du champ électrique, variable en temps (du fait du mouvement accéléré de q), de sens opposé à la direction d'accélération et d'un champ magnétique azimuthal induit par la variation de \vec{E} ($\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$). Le vecteur de Poynting \vec{S} qui mesure la quantité d'énergie électromagnétique transportée par unité de surface et par seconde est ici non-nul. Ceci indique l'émission d'un rayonnement électromagnétique dans un plan transverse à la direction d'accélération. Pour des particules relativistes observées dans un repère immobile, l'effet Doppler accroît la fréquence du rayonnement dans la direction de propagation et inversement il la diminue dans la direction opposée. Le résultat se traduit par un transfert de l'énergie rayonnée dans un cône centré sur la direction de propagation ayant un demi-angle quadratique moyen: $\vartheta_{rms} \approx \frac{1}{\gamma}$, où γ est le facteur relativiste de la charge q .



Le rayonnement synchrotron tient son nom du fait qu'il a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois auprès d'un synchrotron à électrons de 70 MeV construit par la General Electric en 1947.

Pour une machine circulaire, l'accélération normale est produite par la force de Laplace induite par des dipôles de déviation. Dans ce cas, on peut montrer que la puissance rayonnée par une particule portant une charge e et une quantité de mouvement p est donnée par :

$$P_{RS} = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^4 \beta^4}{r^2} \quad \text{où } r \text{ est la rayon de courbure dans les aimants.}$$

Puisque $\frac{p}{m_0 c} = \gamma \beta$, on obtient : $P_{RS} \propto \frac{\gamma^4 \beta^4}{r^2} = \frac{1}{(m_0 c)^4} \frac{p^4}{r^2}$. Pour des électrons et des protons de même quantité de mouvement placés sur la même orbite, on a :

$$\frac{P_{RS}^p}{P_{RS}^e} = \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^4 = \left(\frac{1}{1836}\right)^4 \approx 9 \cdot 10^{-14}.$$

Le rayonnement synchrotron est une limitation pour les machines à électrons circulaires.

Pour des électrons, on a l'expression spécialisée suivante:

$$P_y(\text{GeV/s}) = \frac{c \cdot C_y}{2\pi} \frac{E^4}{r^2} \quad \text{dans laquelle } C_y \text{ est la constante de Sand, } C_y = 8,86 \cdot 10^{-5} \text{ m/GeV}^3.$$

Exemples :

$$\text{LEP200 : } E_e = 108 \text{ GeV, } r = 3096 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad P_y = 61 \text{ TeV/s (par électron)}$$

$$\text{LHC : } E_p = 7000 \text{ GeV, } r = 2778 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad P_y = 0,31 \text{ eV/s (par proton)}$$

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul de la puissance totale perdue sous la forme de rayonnement synchrotron dans une machine circulaire. Nous commencerons tout d'abord par le calcul de la perte par tour pour une seule particule :

$$\Delta E_{RS} = P_{RS} \frac{2\pi r}{\beta c} = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\beta^3 \gamma^4}{r}$$

, où r est le rayon de courbure dans les dipôles de la machine, avec $r = r_{\text{tunnel}} \eta_{\text{couver}}$, η_{couver} étant la fraction de la circonférence du tunnel couverte par des dipôles.

Pour des électrons ultra-relativistes, on obtient :

$$\Delta E_{RS}(\text{GeV}) = C_y \frac{E^4}{r} \quad (\text{ } C_y \text{ est la constante de Sand}).$$

Si l'on note C_{tunnel} la circonférence du tunnel, f_{rev} la fréquence de révolution et N_e le nombre total d'électrons stockés sur l'orbite, on peut dériver l'expression du courant total moyen I :

$$I = e f_{\text{rev}} N_e, \quad \text{avec } f_{\text{rev}} = \frac{\beta c}{C_{\text{tunnel}}} \text{ (tours/s)}.$$

Soit, pour la puissance totale rayonnée :

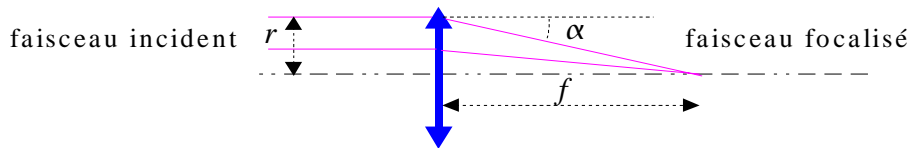
$$P_{RS}^t = \Delta E_{RS} \frac{I}{e} \Rightarrow P_{RS}^t (\text{MW}) = 8,86 \cdot 10^{-2} \frac{E^4 (\text{GeV}^4)}{r (\text{m})} I (\text{A}) \quad (\text{pour des électrons})$$

La table ci-dessous présente la valeur de cette grandeur pour quelques accélérateurs.

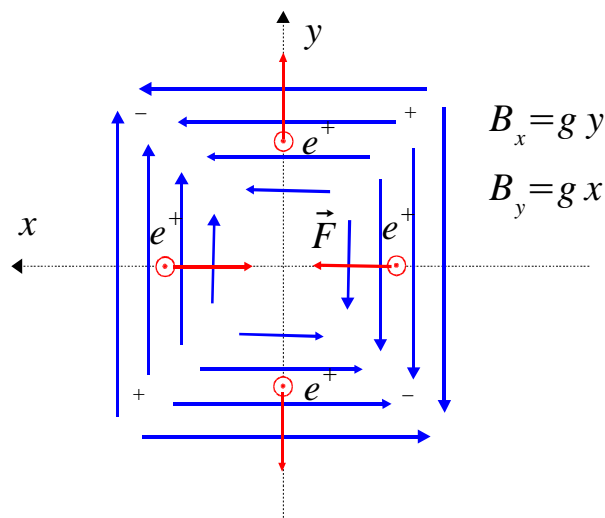
	$E(\text{GeV})$	$r(\text{m})$	$I(\text{mA})$	$\Delta E_{RS}(\text{GeV}/\text{tour})$	$P_{RS}^t(\text{MW})$
LEP100	50	3096	6	0,17	1,1
LEP200	108	3096	4	3,9	15,6
LHC	7000	2778	1060	$6,9 \cdot 10^{-6}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$

2.3 Focalisation par un champ magnétique quadripolaire :

Défléchir un faisceau ne suffit pas en général . Fréquemment , on est également amené à ajuster la taille transverse des faisceaux. Pour cela, on utilise dans la plupart des cas des éléments d'optique magnétique. On fait appel aux mêmes concepts que ceux utilisés en optique géométrique classique.



L'un des éléments les plus souvent rencontrés est le quadripôle magnétique :



On note sur la figure précédente qu'un faisceau de positons est défocalisé dans la direction verticale et focalisé dans la direction horizontale. Pour obtenir une focalisation dans les deux directions transverses, il faut faire appel à un doublet de quadripôles placés dans le faisceau l'un après l'autre. La distance focale d'un doublet de lentilles est donnée par :

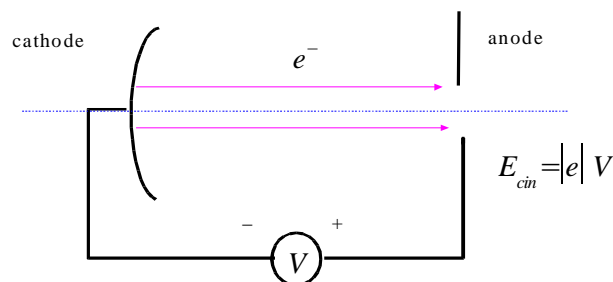
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} .$$

Si on ajuste les distances focales des quadripôles (en jouant avec les intensités des champs magnétiques, donc des courants circulant dans les bobines) de telle sorte que $f_1 = -f_2 = f'$, ou encore un quadripôle convergent (dans une direction) suivi d'un quadripôle divergent (dans la même direction), on obtient un système qui focalise dans les deux directions avec une distance focale donnée par:

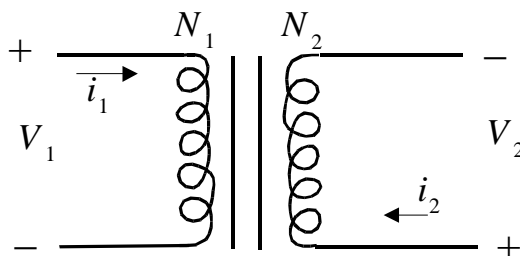
$$\frac{1}{f} = \frac{d}{|f_1 f_2|} = \frac{d}{f'^2} .$$

3 Les accélérateurs électrostatiques :

Comme cette dénomination l'indique , le champ électrique accélérateur dans ce type de machines est obtenu à partir d'une différence de potentiels statique . Le schéma suivant présente la machine de ce type la plus simple que l'on puisse imaginer :



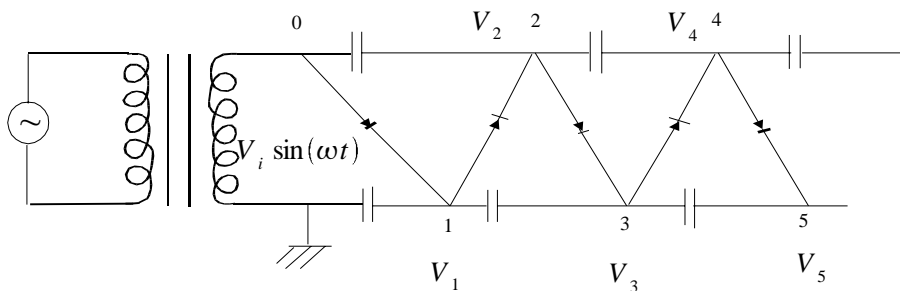
Un générateur de haute tension est utilisé entre l'anode et la cathode. Ce générateur de haute tension peut être un transformateur rectifié :



$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1, \quad N_1 i_1 = N_2 i_2, \quad V_1 i_1 = V_2 i_2$$

Au-dessus de 100 kV (au secondaire) cette configuration ne peut plus être utilisée car on rencontre des problèmes d'isolation électrique et la taille du noyau de fer du transformateur devient excessive.

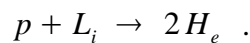
3.1 Générateur en cascade de Cockcroft et Walton :



À l'équilibre, plus aucun courant ne doit circuler dans le circuit. On doit donc satisfaire:

$$\begin{aligned} \forall t, V_0(t) &= V_i \sin(\omega t) \\ \forall t, V_1(t) &\geq V_0(t) \Rightarrow V_1 = V_i \\ \forall t, V_2(t) &\geq V_1(t) = V_i, \quad V_2(t) = V_0(t) + \Delta V \Rightarrow \Delta V = 2V_i \\ \forall t, V_3(t) &\geq V_2(t) \Rightarrow V_3 = 3V_i \\ &\vdots \\ V_5 &= 5V_i \end{aligned}$$

La tension au point N (impair) est multipliée par N . En 1932, Cockcroft et Walton construisirent le premier accélérateur utilisant un générateur de la sorte. Ils purent atteindre une HT de 600 kV et réaliser ainsi la première réaction nucléaire à l'aide de particules artificiellement accélérées :

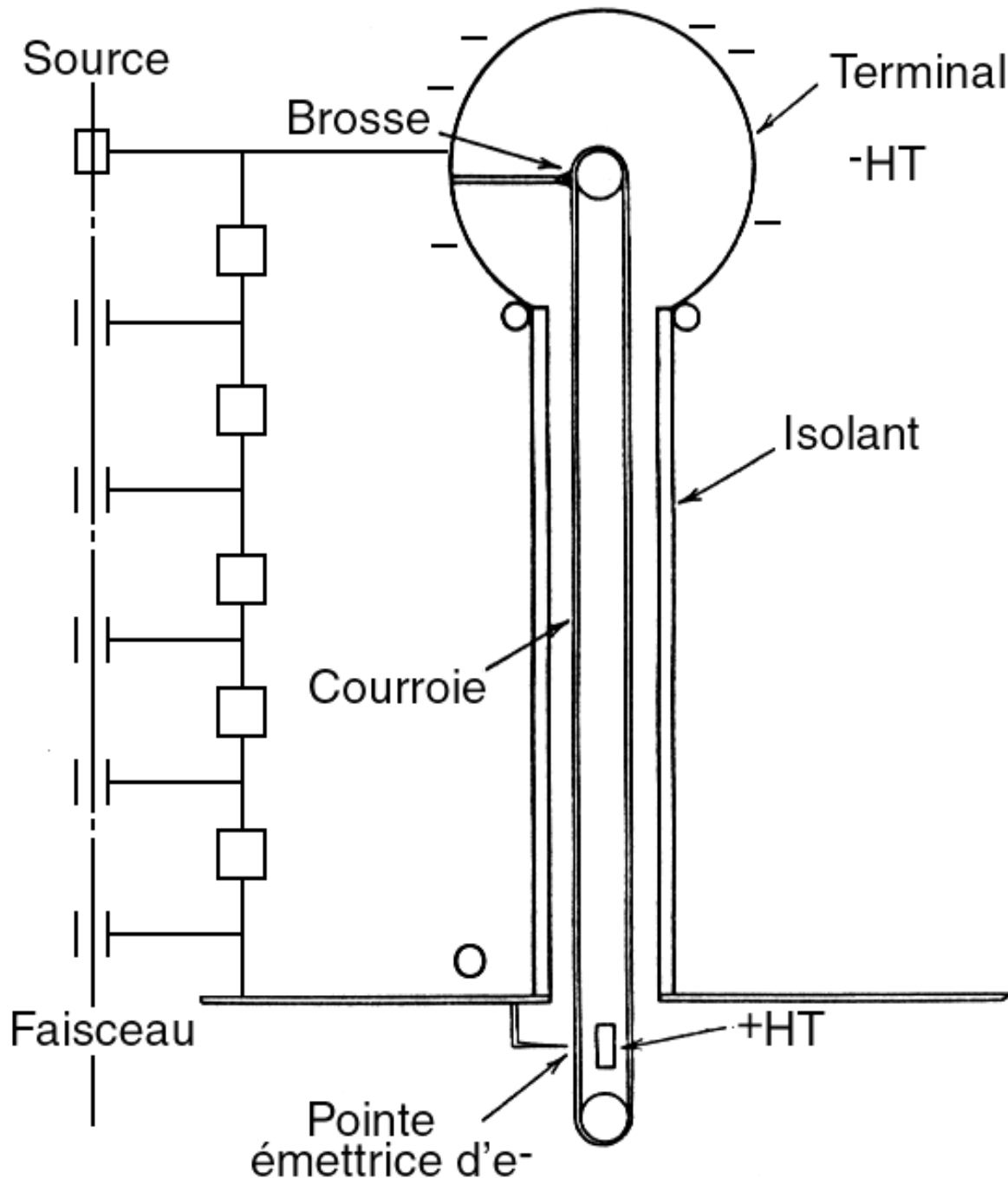


Du fait de leur grande efficacité, les générateurs de Cockcroft – Walton sont toujours utilisés dans les accélérateurs modernes de protons comme pré-injecteurs.

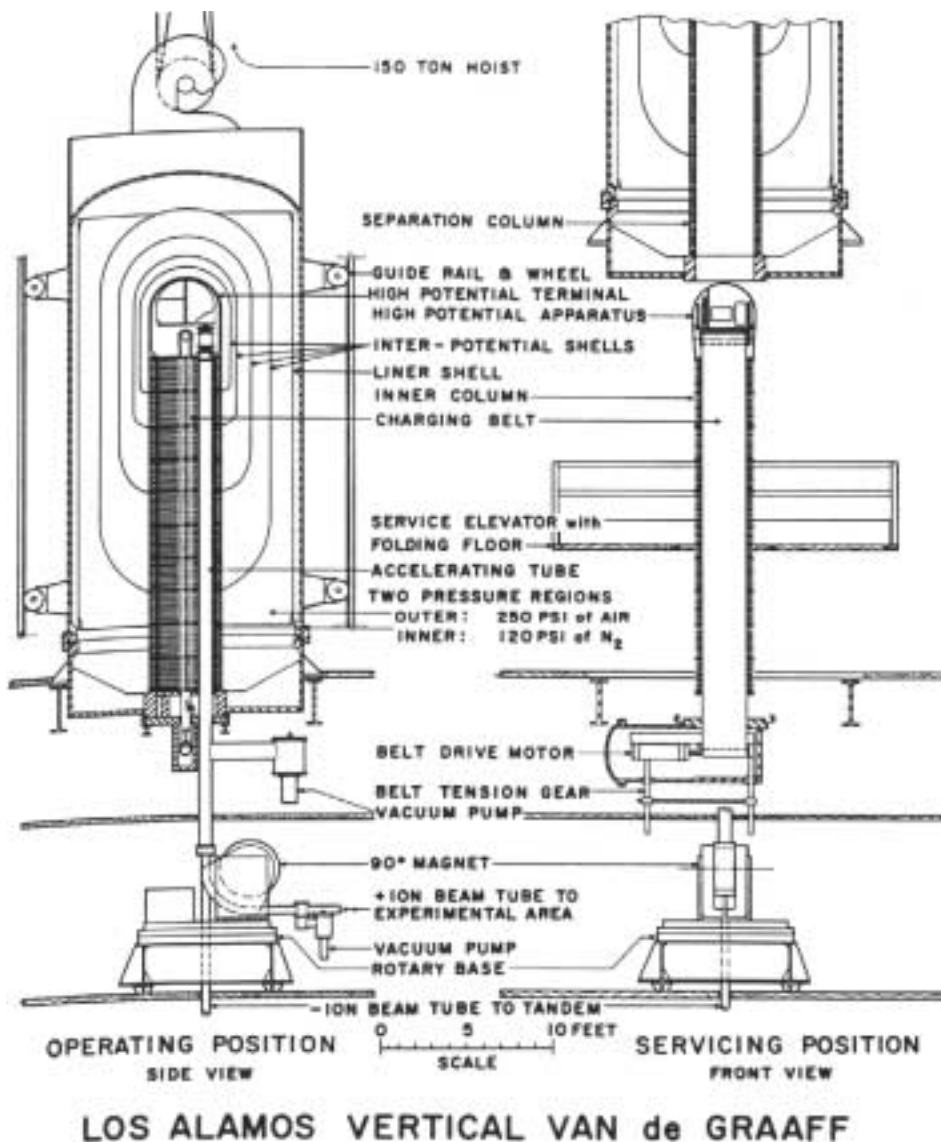
Pour atteindre $N V_i$, il faut attendre que tous les condensateurs soient totalement chargés. L'accélération de particules consomme de l'énergie qui tend à décharger les condensateurs. En conséquence, les générateurs de Cockcroft–Walton ne peuvent être des machines continues.

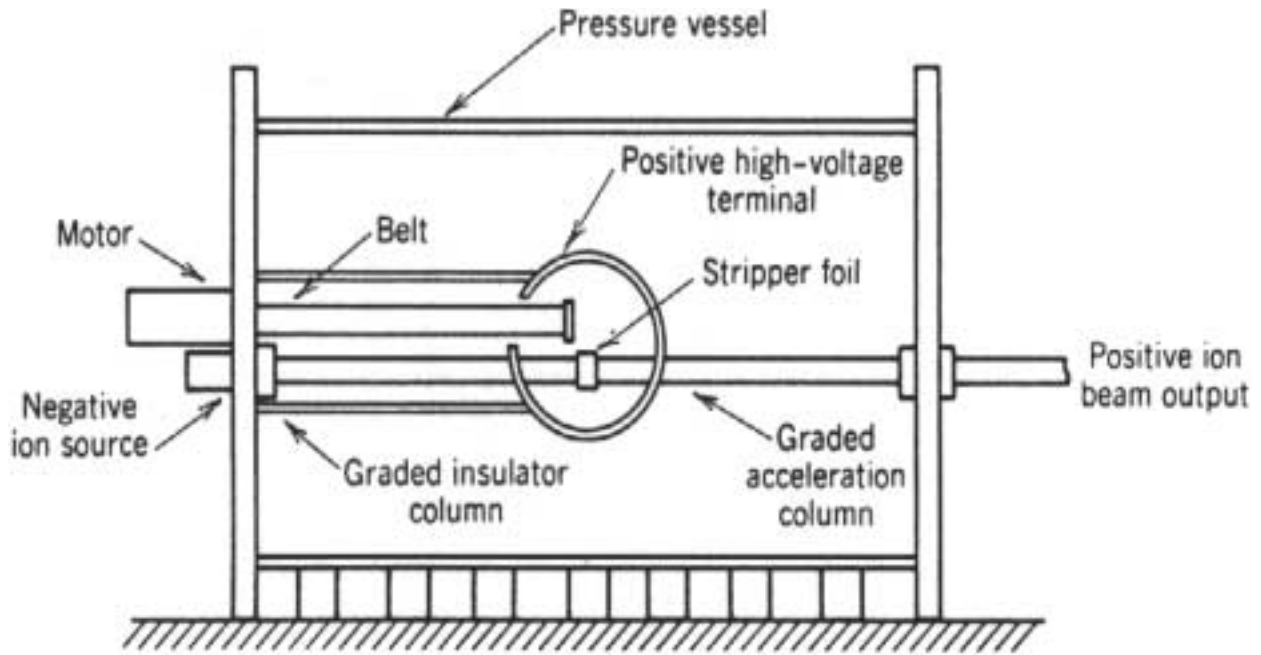
3.2 Générateur de Van de Graaf :

Une courroie isolante placée entre une pointe émettrice et un plot porté à une tension supérieure à la tension de rupture, véhicule les électrons vers un terminal où ils sont recueillis par une brosse spéciale. Le terminal est placé au bout d'une colonne isolante qui permet d'atteindre des tensions électrostatiques élevées. Il est connecté à un diviseur résistif, dont l'extrémité est reliée au potentiel zéro de la pointe émettrice, afin d'établir un champ électrique accélérateur uniforme le long du tube à vide du faisceau.



Ce type de générateurs permet d'atteindre des tensions électrostatiques d'un maximum de 15 MV dans des conditions stables. Les courants accélérés délivrés par cette machine sont continus et peuvent atteindre environ $10 \mu\text{A}$. En mode tandem (selon le schéma qui suit), on peut doubler l'énergie cinétique des particules accélérées.

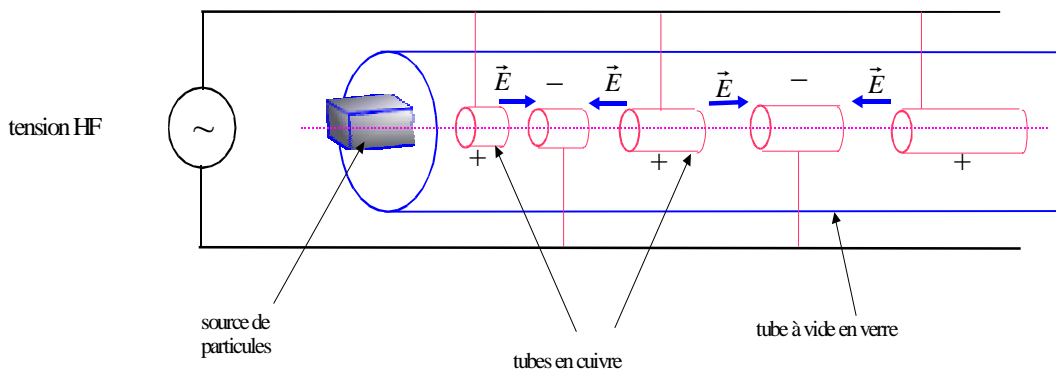




4 Les accélérateurs linéaires (linacs) :

4.1 Linac de Wideröe :

Cette configuration de machines a été proposée par G. Ising en 1924 et R. Wideröe en 1928 .



La tension délivrée par le générateur HF est alternative: $V(t) = \Delta V \sin(\omega t + \phi_s)$. Chaque interstice entre deux cavités produit une différence de potentiel maximale ΔV .

La particule y gagne l'énergie: $|q|\Delta V \sin(\phi_s)$. À l'intérieur d'un tube en cuivre, le champ électrique est nul. La particule traverse chaque interstice d'accélération au moment où le champ est au voisinage de son maximum: $\frac{\Delta V}{d} \sin(\phi_s)$, ϕ_s étant la phase de la machine. Elle ressort de chaque tube une demi-période plus tard lorsque le champ s'est inversé. La synchronisation de la machine exige:

$$L_i \text{ (longueur du } i^{\text{ème}} \text{ tube)} = \frac{1}{2} v_i T_{HF} = \frac{1}{2} \beta_i T_{HF} \cdot c ,$$

En conséquence, la longueur des tubes croît le long de la machine au fur et mesure que la particule gagne de la vitesse.

R. Wideröe fut le premier à construire une telle machine pour accélérer des ions K^+ à 50 keV (1928). En 1931, D. Sloan et E. Lawrence construisirent un générateur HF de 50 kW à 10 MHz et purent ainsi accélérer des ions Hg^+ à 1,26 MeV dans une machine qui comportait 30 tubes.

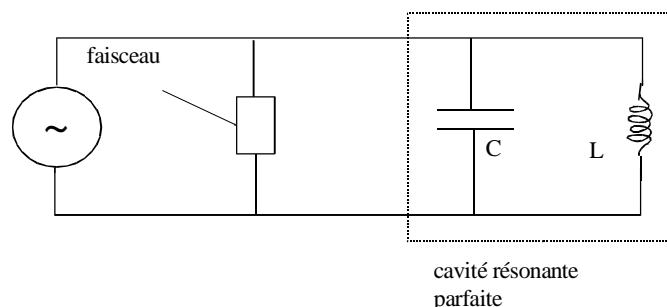
Ce type d'accélérateurs convient principalement pour les ions de basse énergie car ces particules ont un coefficient béta qui reste petit. Ces machines se rencontrent encore de nos jours comme injecteur dans les accélérateurs d'ions lourds de plus haute énergie.

Pour les électrons, cet accélérateur présente beaucoup d'inconvénients. En effet, pour ces particules β est rapidement voisin de 1. Par exemple, si β est voisin de 1 et qu'une machine de ce type fonctionne à une fréquence de 100 MHz avec une tension maximale de 100 kV, on doit utiliser des tubes de 15 m de longueur, ce qui conduit à une machine de 150 m de longueur pour un gain de 1 MeV en énergie cinétique. Pour monter en énergie en gardant une longueur raisonnable, il faudrait augmenter la fréquence. À haute fréquence, les tubes à dérive agissent comme des antennes dipolaires rayonnant ainsi énormément d'énergie. La solution consiste alors à enfermer les tubes dans une cavité fermée résonante dont les murs réfléchissent le rayonnement.

4.2 Cavités résonantes :

Modèle électrique de cavités parfaites :

Nous allons tout d'abord analyser un circuit électrique résonant. Par analogie, cela permettra de comprendre ce qui se passe dans les cavités résonantes.



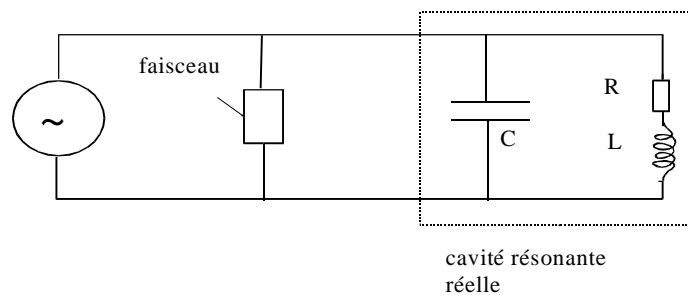
Une cavité résonante parfaite est assimilable à un circuit électrique résonant composé d'une capacité en parallèle sur une self. L'impédance équivalente de ces deux composants en parallèle est donnée par :

$$Z(\omega) = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} , \text{ pour laquelle la fréquence de résonance , obtenue lorsque } |Z(\omega)| \rightarrow +\infty , \text{ est } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} .$$

À ω_0 , toute l'énergie est transférée du générateur vers la résistance de charge qui symbolise le faisceau de particules .

Modèle électrique de cavités réelles :

La situation précédente est évidemment idéale et dans la réalité nous rencontrerons plutôt le schéma qui suit :



Dans lequel un composant additionnel R a été ajouté pour tenir compte de la résistance de perte ohmique dans une cavité réelle . Cette fois-ci l'impédance équivalente des deux branches en parallèle symbolisant une cavité s'écrit :

$$Z(\omega) = \left(j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \right)^{-1} = \frac{(j\omega L + R)}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\omega RC \right)} = \frac{(j\omega L + R)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - j\omega RC\right)}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (\omega RC)^2 \right)} .$$

À la fréquence ω_0 , $|Z(\omega_0)|$ est finie. Il y a transfert et perte d'énergie dans cette partie du circuit; c'est à dire dans la cavité. Il faut entretenir la résonance par apport d'énergie qui compensera les pertes ohmiques dans la cavité, ainsi que le transfert d'énergie vers le faisceau.

La largeur de la résonance, déterminée à un cinquième de sa hauteur, est obtenue par l'expression suivante:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\sqrt{L/C}} .$$

Une bonne cavité accélératrice devra avoir une résonance aussi étroite que possible pour se rapprocher du cas idéal sans perte ohmique, ce qui signifie: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$.

Facteur de qualité d'une cavité résonante :

On définit le facteur de qualité (Q) du circuit de la cavité résonante par:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot \text{Énergie stockée dans la cavité}}{\text{Puissance moyenne dissipée}} = \frac{\pi \cdot \text{Énergie stockée dans la cavité}}{\text{Énergie perdue par demi-cycle}}$$

L'énergie accumulée dans la cavité peut être calculée lorsque le courant dans la branche selfique est maximal:

$$U = \frac{1}{2} L I_0^2 .$$

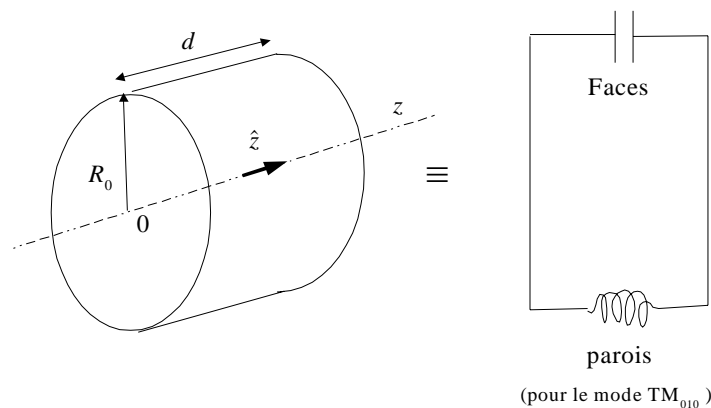
Par ailleurs, la puissance moyenne dissipée dans la résistance de perte est donnée par :

$$\langle P \rangle = \langle i(t)^2 \rangle R = \frac{1}{2} I_0^2 R .$$

Puisque: $Q = \omega_0 \frac{U}{\langle P \rangle}$, on obtient en remplaçant dans cette équation les grandeurs concernées par leurs expressions précédentes : $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = (\Delta\omega/\omega_0)^{-1}$. Pour une bonne cavité on doit obtenir un facteur de qualité très supérieur à 1. À la résonance, l'impédance de la cavité est obtenue par:

$$|Z(\omega_0)| = \frac{L/C}{R} = \frac{L}{RC} = Q \sqrt{L/C} \text{ pour une bonne cavité, c'est à dire lorsque } Q \gg 1 .$$

Nous pouvons maintenant passer à l'étude d'une cavité réelle communément rencontrée .

Cavité résonante cylindrique :

À l'intérieur de la cavité , les équations de propagation des champs électromagnétiques sont :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad v = \frac{c}{(\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0)^{1/2}} .$$

Ici nous n'examinerons qu'un sous-ensemble des solutions avec les conditions suivantes (qui présentent un intérêt pour l'accélération) :

- symétrie azimutale: $\partial/\partial\phi=0$;
- pas de variation longitudinale ;
- pas de composante radiale ;
- variation en temps proportionnelle à $\exp(j\omega t)$.

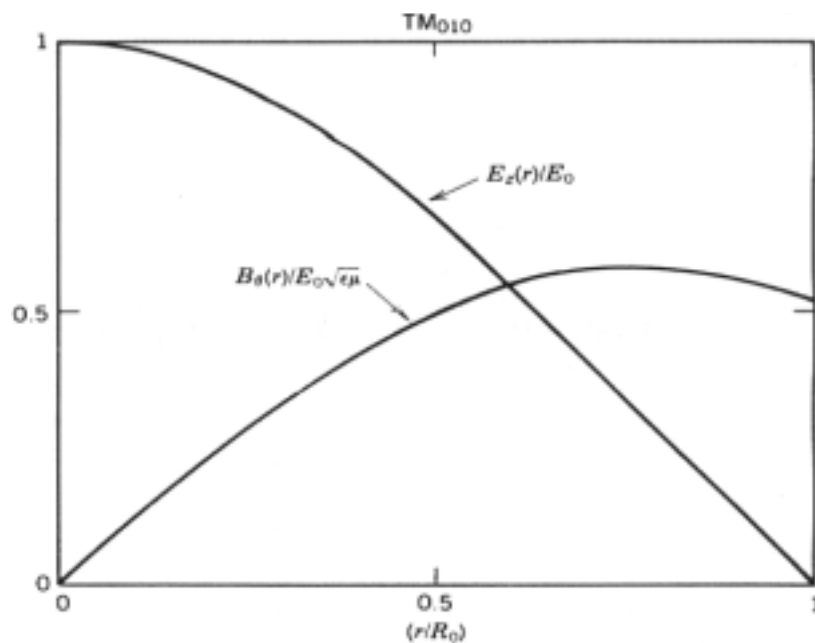
La solution générale qui satisfait ces conditions est : $\vec{E}(r,t) = E_z(r) \exp(j\omega t) \hat{z}$, d'où :

$$\frac{d^2 E_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_z(r)}{dr} + \frac{\omega^2}{v^2} E_z(r) = 0$$

Cette équation est une forme particulière de l'équation de Bessel. Si de plus, on a $E_z(r=0) \neq 0$, du fait que l'accélération a lieu sur l'axe (o,z), et $E_z(R_0) = 0$ car le champ est nul sur la paroi, les solutions de cette équation s'expriment alors sous la forme :

$\vec{E}_{zn}(r,t) = E_{on} J_0(k_n r) \exp(j\omega_n t) \hat{z}$ où $J_0(k_n r)$ est la fonction d'ordre 0 de Bessel de 1^{ère} espèce (car $J_0(0) \neq 0$).

Mode de la résonance	k_n	ω_n
TM ₀₁₀	2,405/ R_0	2,405/ $\sqrt{\epsilon\mu} R_0$
TM ₀₂₀	5,52/ R_0	5,52/ $\sqrt{\epsilon\mu} R_0$
TM ₀₃₀	8,654/ R_0	8,654/ $\sqrt{\epsilon\mu} R_0$



TM signifie mode Transverse Magnétique , TM_{pnq} où p est la périodicité azimutale, n est le nombre de noeuds+1 dans la direction radiale et q la périodicité axiale. ω_n et k_n ne dépendent que de R_0 pour les

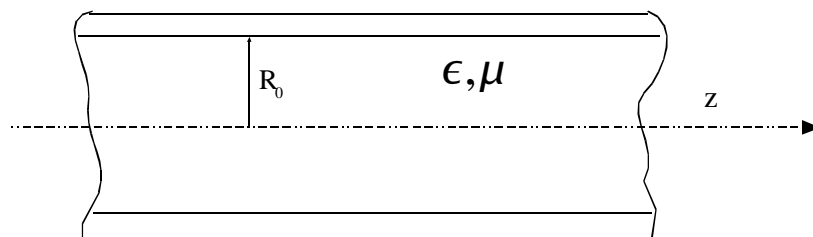
modes TM_{0n0} . Les pertes ohmiques se produisent dans les parois où les courants sont grands. Le facteur de qualité d'une cavité cylindrique fonctionnant dans le mode TM_{010} est obtenu à partir de l'expression suivante: $Q = \frac{d/\delta}{1+d/R_0}$ où δ est la profondeur de peau (à haute fréquence le courant ne circule qu'en surface sur une profondeur δ). δ dépend de la fréquence et du matériau de la paroi. Pour le cuivre à $F = 1$ GHz, $\delta = 2\mu\text{m}$. Pour maintenir Q suffisamment haut, il faut polir la surface de la cavité à mieux que δ !

Pour $R_0 = 11,5$ cm et $d = 4$ cm avec $F_l = 1$ GHz, on a :

$$Q = 1,5 \cdot 10^4, \quad \Delta F_1/F_1 = 1/Q = 6,7 \cdot 10^{-5}, \quad \Delta F_1 = \pm 67 \text{ kHz}$$

4.3 Guides d'ondes :

Les cavités résonantes ont une dimension axiale finie. Leurs parois réfléchissent les ondes électromagnétiques internes et donnent ainsi naissance à un phénomène stationnaire. Dans ce sous-chapitre, nous allons examiner les cavités sans limite axiale. Les ondes électromagnétiques s'y propagent. Ce sont ce que l'on appelle des guides d'ondes. Les guides d'ondes qui nous intéressent ici ont des parois latérales métalliques. Et nous nous concentrerons sur le guide d'onde cylindrique qui est simplement un tube creux. Les guides d'ondes sont utilisés soit pour l'alimentation des cavités, soit pour l'accélération continue de particules.



Il y a une infinité de modes de propagation possibles, mais nous allons nous restreindre ici à l'étude des modes donnant naissance à des champs à symétrie azimutale: $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$; c'est à dire :

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, z, t) &= \vec{E}(r) \exp(j(\omega t - kz)) \\ \vec{B}(r, z, t) &= \vec{B}(r) \exp(j(\omega t - kz)) \end{aligned}$$

L'onde se propage à la vitesse (de phase) $v = \omega/k$ dans le sens $(0, z)$.

À l'intérieur du guide, les équations de Maxwell sont:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{car il n'y a pas de charge, pas de courant})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -j\omega \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= j\omega \epsilon \mu \vec{E} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad k_0 = \sqrt{\epsilon \mu} \omega = \frac{\omega}{c}, \quad c \text{ étant la vitesse de la lumière dans le guide d'onde.}$$

En utilisant la formule suivante de l'analyse vectorielle:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad \text{avec} \quad \nabla^2 \vec{F} = \nabla^2 F_1 \vec{i} + \nabla^2 F_2 \vec{j} + \nabla^2 F_3 \vec{k} ,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{B} &= \omega^2 \epsilon \mu \vec{B} \Rightarrow \nabla^2 \vec{B} = -k_o^2 \vec{B} \\ -\nabla^2 \vec{E} &= \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = -k_o^2 \vec{E} \end{aligned} \quad \text{qui sont les équations de propagation .}$$

En développant les équations de Maxwell qui couplent \vec{E} à \vec{B} et vice versa, on obtient:

$$\begin{aligned} j k E_\phi &= -j \omega B_r & j k B_\phi &= j(k_o^2 / \omega) E_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) &= -j \omega B_z & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) &= j(k_o^2 / \omega) E_z \\ -j k E_r - \frac{\partial}{\partial r} (E_z) &= -j \omega B_\phi & -j k B_r - \frac{\partial}{\partial r} (B_z) &= j(k_o^2 / \omega) E_\phi \end{aligned} \quad \text{et}$$

Rappel de l'expression du rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_z & \vec{e}_r & \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \Phi} \\ F_z & F_r & r F_\phi \end{vmatrix}$$

On remanie ces relations de telle façon à faire apparaître les couplages entre les champs transverses et les dérivées des composantes longitudinales:

$$\begin{aligned} B_r &= -j k \frac{\partial}{\partial r} (B_z) / (k_o^2 - k^2) \\ E_r &= -j k \frac{\partial}{\partial r} (E_z) / (k_o^2 - k^2) \\ B_\phi &= -j(k_o^2 / \omega) \frac{\partial}{\partial r} (E_z) / (k_o^2 - k^2) \\ E_\phi &= j \omega \frac{\partial}{\partial r} (B_z) / (k_o^2 - k^2) \end{aligned}$$

Il existe deux types d'ondes qui peuvent se propager dans les conditions précédentes :

$$\text{transverses électriques TE : c'est à dire} \quad E_z = 0 \Rightarrow E_r = B_\phi = 0$$

$$\text{transverses magnétiques TM : c'est à dire} \quad B_z = 0 \Rightarrow E_\phi = B_r = 0$$

La classe d'ondes qui a un intérêt pour l'accélération de particules doit présenter une composante longitudinale de champ électrique non-nul. Ce sont donc des ondes Transverses Magnétiques. Pour les ondes TM_{0n} , les composantes transverses sont E_r et B_ϕ et la condition aux limites est: $E_z(R_0) = 0$. On utilise l'équation de propagation pour déterminer E_z : (une fois E_z obtenue, B_ϕ est calculée en dérivant E_z par rapport à r)

$$\nabla^2 E_z = -k_o^2 E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) = -k^2 E_z + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2}$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} = (k^2 - k_0^2) E_z \quad .$$

On retrouve la forme spéciale de l'équation de Bessel qui admet pour solution:

$$E_z(r, z, t) = E_0 J_0(\sqrt{(k_0^2 - k^2)} r) \exp(j(\omega t - kz)) \quad \text{avec } k_0^2 - k^2 = x_n^2 / R_0^2 \quad (x_n \in \{2,405; 5,52; 8,65\dots\})$$

et $k = (\epsilon \mu \omega^2 - x_n^2 / R_0^2)^{1/2}$, qui est la relation de dispersion pour les modes TM_{0n} .

Si k est imaginaire, il n'y a pas de propagation. Il existe donc une fréquence de coupure en-dessous de laquelle les ondes ne se propagent pas:

$$\epsilon \mu \omega_c^2 = x_1^2 / R_0^2 \Rightarrow \omega_c = \frac{2,405}{\sqrt{\epsilon \mu} R_0} \quad .$$

À ω_c , la longueur d'onde ($\lambda = 2\pi/k$) dans le guide est infinie. La longueur d'onde, à l'extérieur d'un guide, d'une onde à ω_c est donnée par: $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi c / \omega_c \simeq 2.61 R_0$, pour le mode TM_{01} .

Dans le guide la longueur d'onde de ce mode, pour une fréquence ω donnée, est:

$$\lambda = \lambda_0 / (1 - \omega_c^2 / \omega^2) \quad . \text{ La vitesse de phase est } v = \omega / k \quad , \text{ soit:}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 - (\omega_c / \omega)^2}} \quad , \text{ ce qui conduit à } v > c \quad !$$

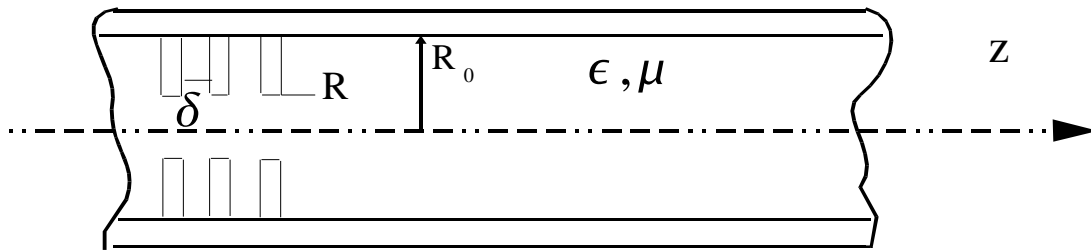
Si $\frac{2,405}{\sqrt{\epsilon \mu} R_0} \leq \omega \leq \frac{5,52}{\sqrt{\epsilon \mu} R_0} \Rightarrow$ seul TM_{01} peut être excité, c'est ce que l'on recherche en général.

La vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est ce que l'on appelle la vitesse de groupe V_g :

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad , \quad k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2) \Rightarrow \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{d\omega}{dk} = v_g \Rightarrow c \cdot \frac{c}{v} < c \quad \text{car } v > c$$

Pour l'accélération de particules, c'est la vitesse de phase qui va déterminer la forme du champ électrique. Pour que ces particules accélérées restent en phase avec ce champ, c'est à dire pour qu'elles sentent toujours le même champ, il faudrait que la vitesse de phase de l'onde soit la même que la vitesse des particules qui est nécessairement inférieure à c . Ce n'est pas le cas. Il apparaît donc nécessaire de modifier la forme de ces guides d'ondes pour ralentir la vitesse de phase.

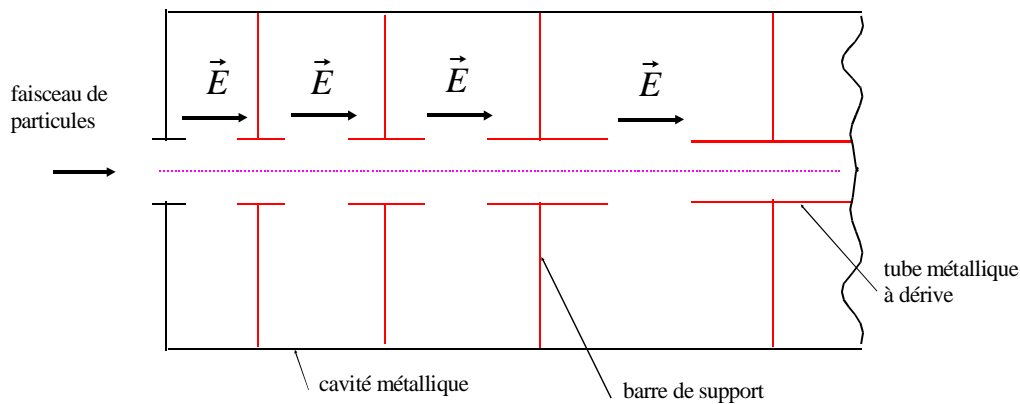
On peut aisément prouver par un raisonnement relativiste qu'un guide d'onde cylindrique lisse ne peut pas transmettre une onde ayant une vitesse de phase plus petite que c . En effet, si une onde se propage avec une vitesse de phase inférieure à la vitesse de la lumière on peut toujours faire une transformation de Lorentz dans un référentiel se déplaçant à cette vitesse. Dans ce référentiel, le guide est le même. Le champ électrique est statique ce qui implique que le champ magnétique est nul. Le champ électrique doit donc nécessairement dériver d'un potentiel ce qui est incompatible avec le fait que le tube métallique est à un potentiel constant. La seule solution est $\vec{E} = 0$. Pour briser ce raisonnement, il faut que le tube ait une forme différente dans le repère transformé de Lorentz. On lui donne une structure périodique. Ainsi la contraction de Lorentz va modifier cette forme. Le guide d'onde est doté d'iris selon le dessin suivant:



avec les conditions suivantes $R \ll R_0$ et $\lambda < \delta$ – L’insertion de ces iris crée une séquence de cavités résonantes couplées électromagnétiquement en leurs centres. Cet arrangement agit comme un filtre passe-bande. Par le choix des dimensions, la bande passante ainsi que la vitesse de phase souhaitée peuvent être sélectionnées. Pour les électrons, la vitesse de phase est ajustée sur la vitesse de la lumière.

4.4 Linac d’Alvarez :

Les tubes à dérive sont placés à l’intérieur d’une cavité cylindrique résonante dans le mode TM_{010} .



C’est un linac du type $\beta \lambda$ car les longueurs des tubes à dérive doivent satisfaire:

$$L_n = v_n (2\pi/\omega) = \beta_n \lambda \quad \text{où} \quad \beta_n = v_n/c, \quad v_n \text{ étant la vitesse des particules à l’entrée du tube } n \text{ et}$$

λ la longueur d’onde HF .

Les tubes métalliques peuvent contenir des quadripôles magnétiques de focalisation. Les alimentations de ces aimants sont réalisées à travers les barres de support. Les tubes à dérive peuvent être équipées de barres de couplage orthogonales aux barres de support qui ont pour rôle d’éliminer les modes parasites dangereux tels que : TE.

Exemple de linac d’Alvarez : l’accélérateur linéaire de LAMPF

Paramètres de l'accélérateur de LAMPF

Longueur totale	800 m
Particules	protons
Énergie totale	800 MeV
Courant crête à la sortie	15 mA
Taux de répétition	120 Hz
Durée d'un paquet	1 ms
Cycle utile	12%

Injecteur

ions	H ⁺ ou H ⁻
tension	750 kV
générateur	Cockroft–Walton

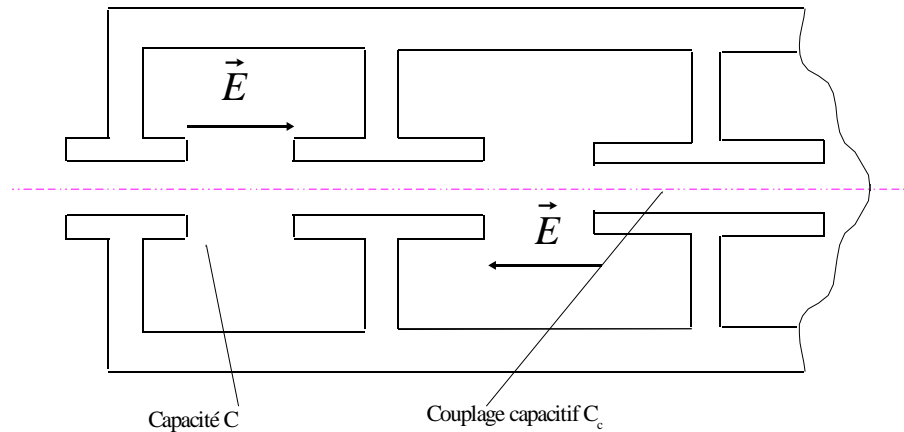
Linac d'Alvarez

Variation d'énergie	0,75 – 100 MeV
Longueur	61,7 m
Fréquence	201,25 MHz
Q des cavités	5 10 ⁴
Diamètre	0,9 m
Nombre de tubes à dérives	165
Champ axial	1,6 – 2,4 MV/m au pic
Phase de synchronisation	64°
nombre de quadripôles	135
Gradient de focalisation	8 – 0,8 kG/cm

4.5 Linac à cavités résonantes couplées :

Pour un champ électrique de crête donné qui se trouve limité par la tension de rupture, un linac $\beta\lambda$ procure un gradient d'accélération moyen deux fois plus faible qu'un linac $\frac{1}{2}\beta\lambda$. Ainsi pour

atteindre une énergie donnée et compte tenu du fait que le choix de la fréquence HF est restreint (contrainte imposée par la technologie des tubes HF), un linac du type $\frac{1}{2}\beta\lambda$ est deux fois plus court qu'un linac du type $\beta\lambda$. Les linacs du type $\frac{1}{2}\beta\lambda$ utilisent des cavités résonantes couplées:

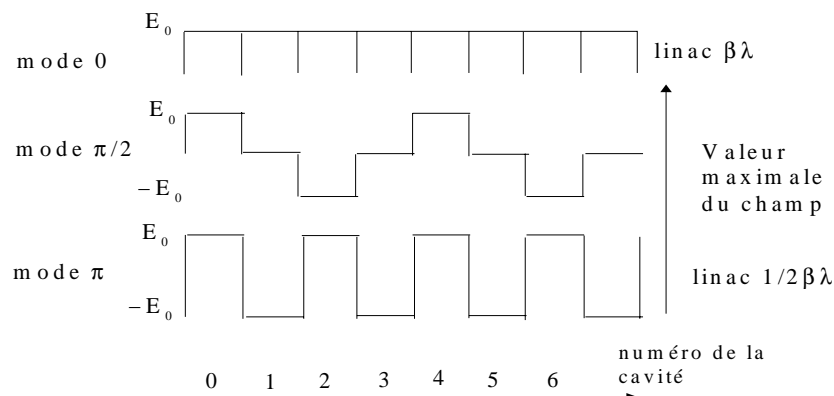


La longueur du $n^{ième}$ tube doit satisfaire: $L_n = \frac{1}{2} v_n T = \frac{1}{2} \beta_n \lambda$. On peut montrer qu'un système de N cavités couplées possède N modes résonants dont les fréquences sont obtenues par :

$f_n = \Omega_n \omega_0 / 2\pi$ avec $\Omega_m = \{1 - 2K(1 - \cos(2\pi m/N))\}^{\frac{1}{2}}$, $K =$ constante de couplage (C_c/C si le couplage est au centre de la cavité, en général $K \ll 1$), $m = 0, 1, 2, 3, 4 \dots N-1$ et $\omega_0 =$ fréquence de résonance des cavités lorsqu'elles ne sont pas couplées. On peut également prouver que dans ces modes, les amplitudes maximales des champs électriques suivent la loi suivante :

$$E_n = E_0 \cos(n\mu) \text{ avec } n \text{ étant l'indice de la } n^{ième} \text{ cavité et } \mu = \pi m / (N-1).$$

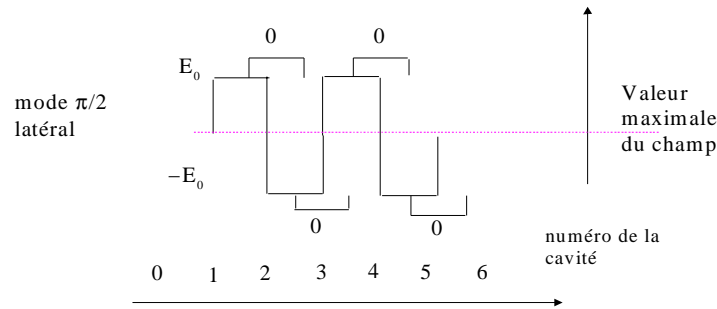
Graphiquement, les valeurs maximales des champs électriques dans les diverses cavités peuvent être représentées de la façon suivante :



En couplant plusieurs cavités, on cherche également à n'utiliser qu'un seul point d'alimentation HF. Il faut donc que le transfert d'énergie entre cavités puisse s'accomplir aisément. Le transfert d'énergie électromagnétique est réglé par la vitesse de groupe. Pour notre étude, on peut montrer que:

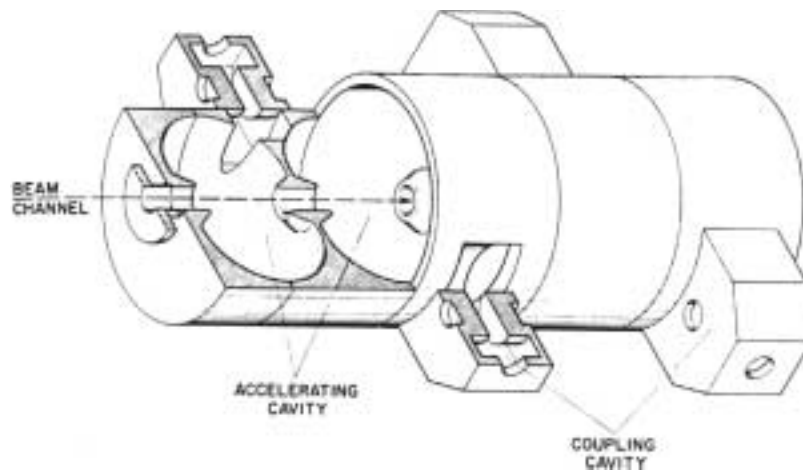
$$V_g = -(\omega_0 d) \frac{\sin \mu}{(1 - 2K(1 - \cos \mu))^{1/2}},$$

ce qui donne une vitesse de groupe nulle pour les modes 0 et π , et au contraire une valeur maximale pour le mode $\pi/2$. Ce dernier mode est celui qui est utilisé, mais pour éviter de perdre un facteur deux dans le gradient moyen d'accélération, les cavités de couplage à champ nul sont déportées sur le côté conformément au schéma de principe suivant:



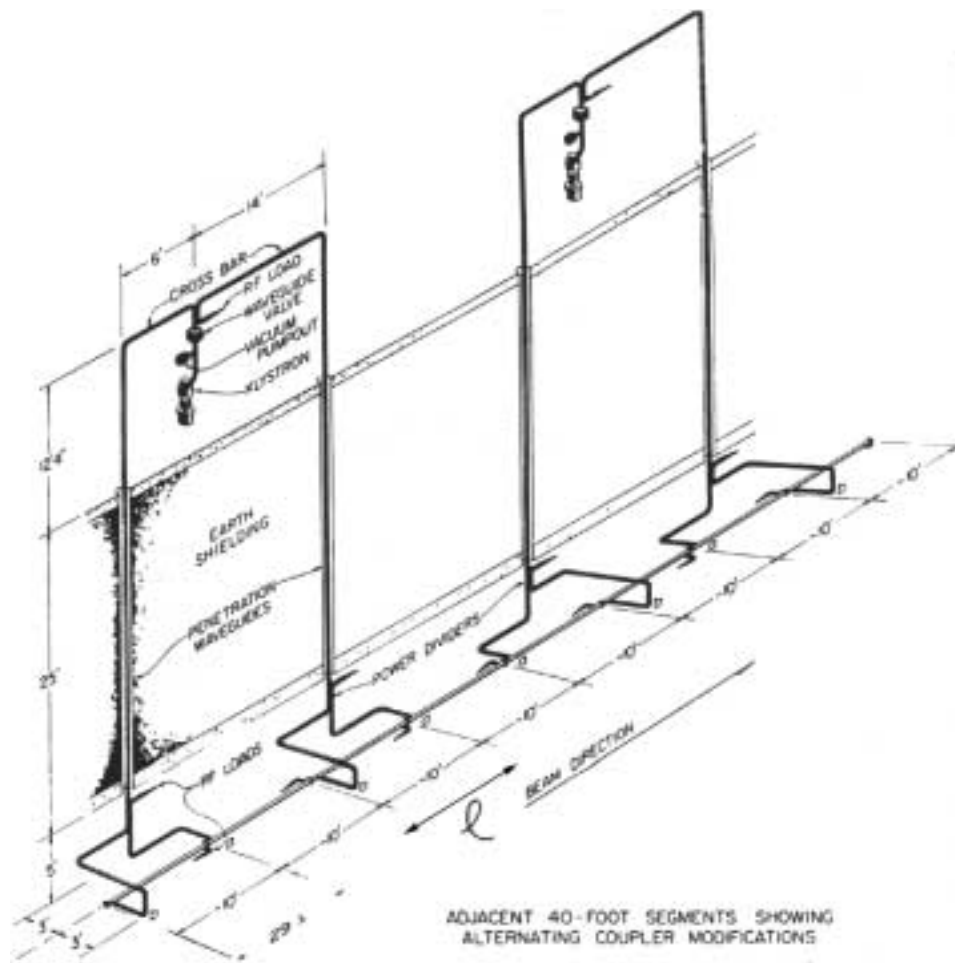
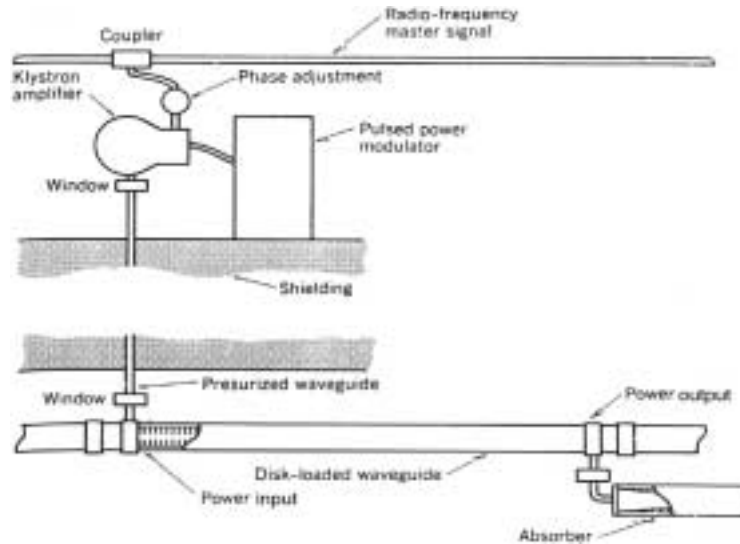
Linac à couplage latéral de LAMPF

Variation d'énergie	100 – 800 MeV
Longueur	726,9 m
Fréquence des cavités	805 MHz (4 x fréquence du linac d'Alvarez)
Nombre de cavités	5000
Champ axial	1,1 MV/m
Phase de synchronisation	64 – 70°
Nombre de quadripôles	204



4.6 Les linacs pour électrons de haute énergie :

Étant donné que les électrons sont des particules qui atteignent rapidement la vitesse de la lumière, les structures qui semblent les plus adaptées à leur accélération sont les guides d'ondes à haute fréquence. Les figures ci-dessous présentent la disposition générale d'une telle machine :



Nous allons brièvement étudier le rendement énergétique d'un linac à électrons. Nous noterons :

l : la longueur de chaque section indépendamment alimentée ;

L : la longueur totale de la machine

P_i : la puissance totale disponible

Par analogie avec les cavités résonantes , le facteur de qualité Q pour les guides d'ondes caractérise les pertes thermiques dans les parois selon :

$$-(dP/dz) = U \omega / Q ,$$

où :

$\frac{dP}{dz}$ est la puissance dissipée par unité de longueur ,

U est l'énergie électromagnétique stockée dans le guide par unité de longueur,

ω est la pulsation de l'onde se propageant dans le guide .

D'autre part, nous savons que la vitesse de groupe v_g de l'onde transmise n'est rien d'autre que la vitesse de transfert de l'énergie HF le long du guide. En fait, v_g peut s'écrire sous la forme suivante:

$$v_g = \frac{\text{Flux d'énergie} \times S}{\text{Densité d'énergie électromagnétique} \times S}$$



$U V_g = P$, le transfert d'énergie s'effectue à la vitesse v_g

$$-\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{\omega}{Q V_g}\right) P$$

$$\text{d'où , } P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{\omega z}{Q v_g}\right) .$$

Par ailleurs, la puissance transportée par une onde électromagnétique peut être calculée à partir du vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$.

$$P = \int \vec{S} \cdot d\vec{A} .$$

Lorsqu'il s'agit d'une onde TM_{01} , on peut montrer que: $|\vec{S}| \propto E_{zmax}^2$, (l'amplitude maximale du champ électrique axial). On a donc: $P(z) \propto E_{zmax}^2(z)$ d'où:

$E_{zmax}(z) = E_{z0} \exp\left(-\frac{\omega}{2Qv_g} z\right) = E_{z0} \exp(-z/l_0)$ avec $l_0 = \frac{2Qv_g}{\omega}$. L'amplitude maximale du champ électrique est atténuée exponentiellement le long du guide.

Le gain d'énergie d'un électron dans une section l du guide est :

$$\Delta E_{cin} = e \int_0^l E_{zmax}(z) dz = e E_{z0} l_0 (1 - \exp(-l/l_0)) ,$$

ce qui pour l'accélérateur complet conduit à :

$$E_{cin}^{tot} = \left(\frac{L}{l}\right) \Delta E_{cin} = e E_{z0} \frac{L \cdot l_0}{l} (1 - \exp(-l/l_0)) .$$

La recherche de l'optimum pour l doit tenir compte du fait que la puissance HF totale est limitée. Soit P_t la puissance HF totale disponible. La puissance disponible par section est :

$$\Delta P = \frac{P_t \cdot l}{L} ,$$

et puisque E_{z0}^2 est proportionnelle à la puissance HF disponible par section, on obtient que :

$$E_{z0} \propto l^{1/2} \quad (\text{à puissance totale et longueur totale fixes}) , \text{ soit encore } ,$$

$$E_{cin}^{tot} \propto \frac{(1 - \exp(-l/l_0))}{\sqrt{(l/l_0)}}$$

E_{cin}^{tot} est maximale pour l/l_0 située au voisinage de 1. (Pour l'accélérateur linéaire de Standford, $l_0 = 3$ m, 6 MW sont disponibles par section, soit une perte de 5,2 MW par section ou encore 1,7 MW/m de guide d'onde)

Impédance de shunt :

Cette quantité est un facteur de mérite pour les accélérateurs linéaires à électrons. Elle est définie par la relation suivante :

$$P_p^t = \frac{V_0^2}{IL} ,$$

où :

I est l'impédance de shunt de l'accélérateur ;

P_p^t est la puissance HF totale dissipée dans les parois des cavités ;

V_0 est la différence de potentiel totale ($\frac{E_{cin}^{tot}}{e}$) ;

L est la longueur totale de la structure accélératrice .

On peut constater que : $[IL]=\Omega$ et donc , $[I]=\Omega/m$.

Pour les accélérateurs actuels , $25 M\Omega/m \leq I \leq 50 M\Omega/m$

On peut également définir l'efficacité d'un linac par :

$$\eta = \frac{IL}{(Z_f + IL)} ,$$

où :

$$Z_f \text{ est l'impédance du faisceau , } Z_f = \frac{V_0}{i_f} ,$$

i_f est le courant du faisceau .

Exemple :

L'énergie totale délivrée par un accélérateur est de 2,5 GeV. L'impédance de shunt est de 50 M Ω /m pour un gradient moyen d'accélération de 8 MV/m. La longueur totale de cet accélérateur est de 312 m.

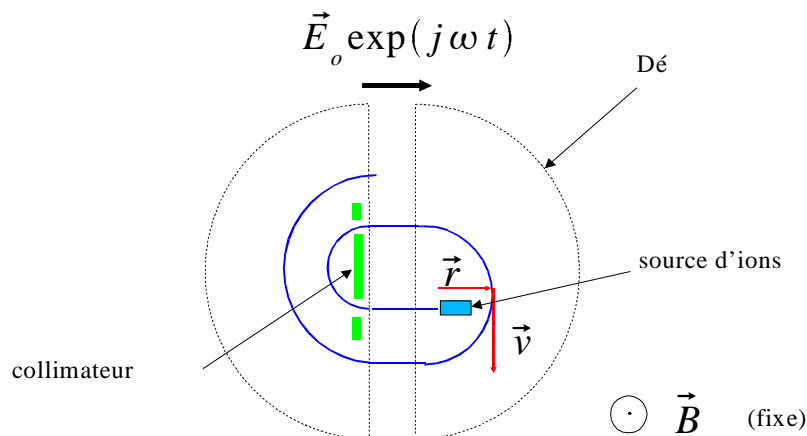
Sa puissance totale dissipée est: $\frac{2,5^2 \cdot 10^{18}}{50 \cdot 10^6 \times 312} = 400 \text{ MW}$! Ce chiffre indique clairement que les linacs à électrons ne peuvent avoir qu'un cycle utile très faible de l'ordre de 0,1 %.

On comprend aisément l'intérêt du développement de cavités supraconductrices qui permettent de réduire notablement les pertes thermiques. De plus, nous avons vu que $P_{HF} = E_{z0}^2$. La mise au point de guides supraconducteurs semble donc s'imposer pour accroître les gradients d'accélération.

5 Accélérateurs circulaires

5.1 Cyclotron à champ uniforme :

Le principe de fonctionnement d'un cyclotron à champ uniforme est indiqué dans la figure qui suit:



Pour un ion de masse m_0 , de charge q (positive), l'équilibre de la force centrifuge et de la force de Laplace conduit à écrire:

$$\gamma m_0 \frac{v^2}{r} = |q| v B$$

$$\gamma m_0 \frac{v}{r} = |q| B \quad \text{avec } v = \omega r$$

$$\gamma m_0 \omega = |q| B$$

$$\text{soit : } \omega = \frac{|q| B}{\gamma m_0}$$

Pour des ions non-relativistes ($v \ll c$, $\gamma \simeq 1$), ω (la fréquence gyromagnétique) ne dépend pas de l'énergie des particules. Le champ accélérateur est délivré par une cavité résonante à la fréquence ω (fixe):

$$f_{HF} = \frac{|q| B}{2\pi \gamma m_0} \simeq 1,52 \cdot 10^7 B(\text{T}) \frac{Z}{A} (\text{Hz})$$

où:

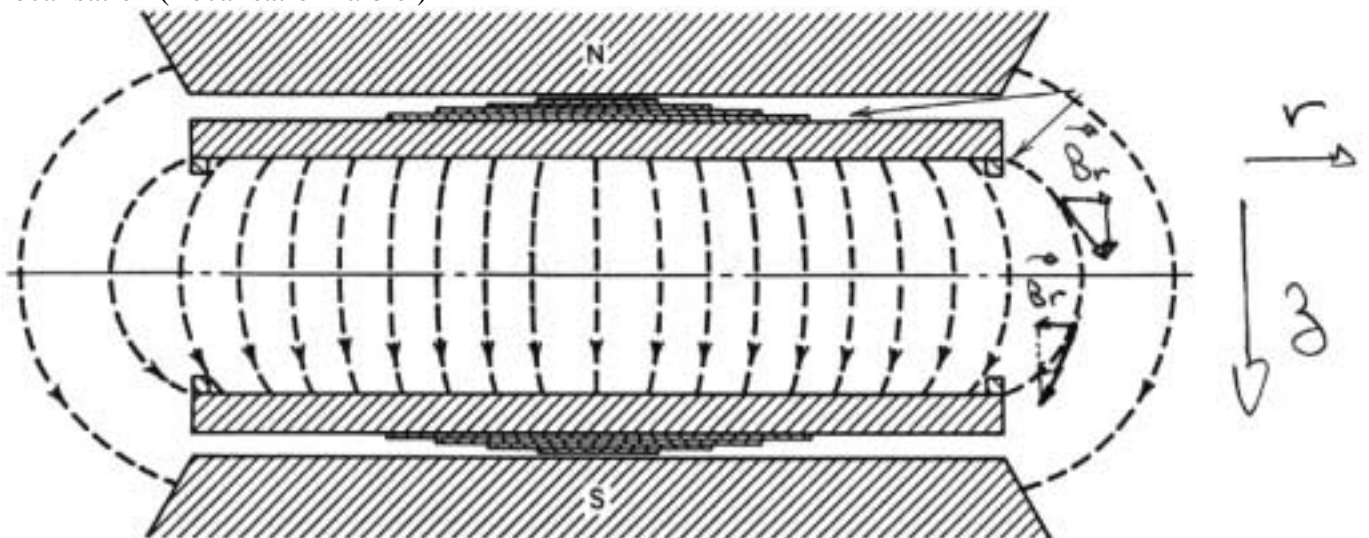
Z est l'état de charge des ions

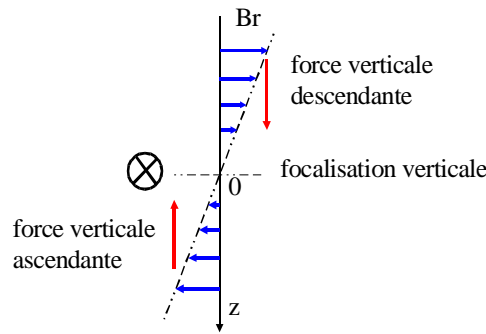
A est le nombre atomique des ions

Un cyclotron qui aurait un champ vertical parfaitement uniforme et sans variation radiale ne pourrait pas assurer de focalisation verticale du faisceau. De ce fait, les aimants des cyclotrons à champ "uniforme" sont conçus pour développer un champ vertical qui décroît en fonction du rayon.

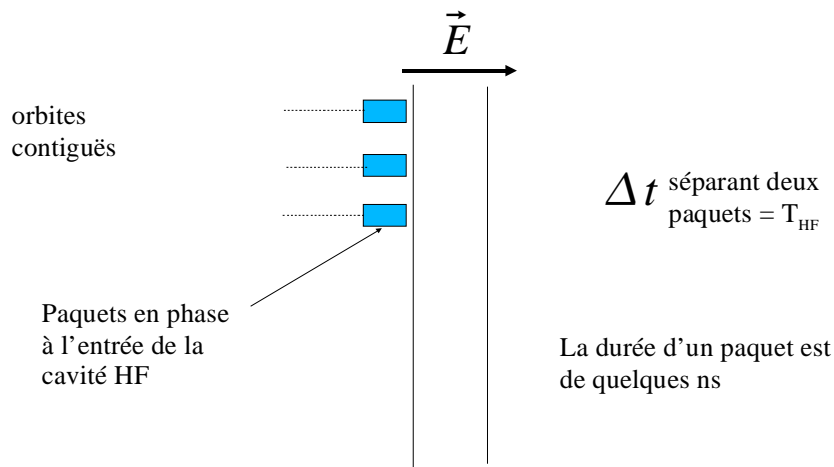
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z} .$$

Une variation radiale du champ vertical crée une variation verticale du champ radial qui assure la focalisation (focalisation faible)





L'espace-temps entre les paquets d'ions est imposé par la fréquence HF, tel que le montre le schéma suivant:



5.2 Synchrocyclotron :

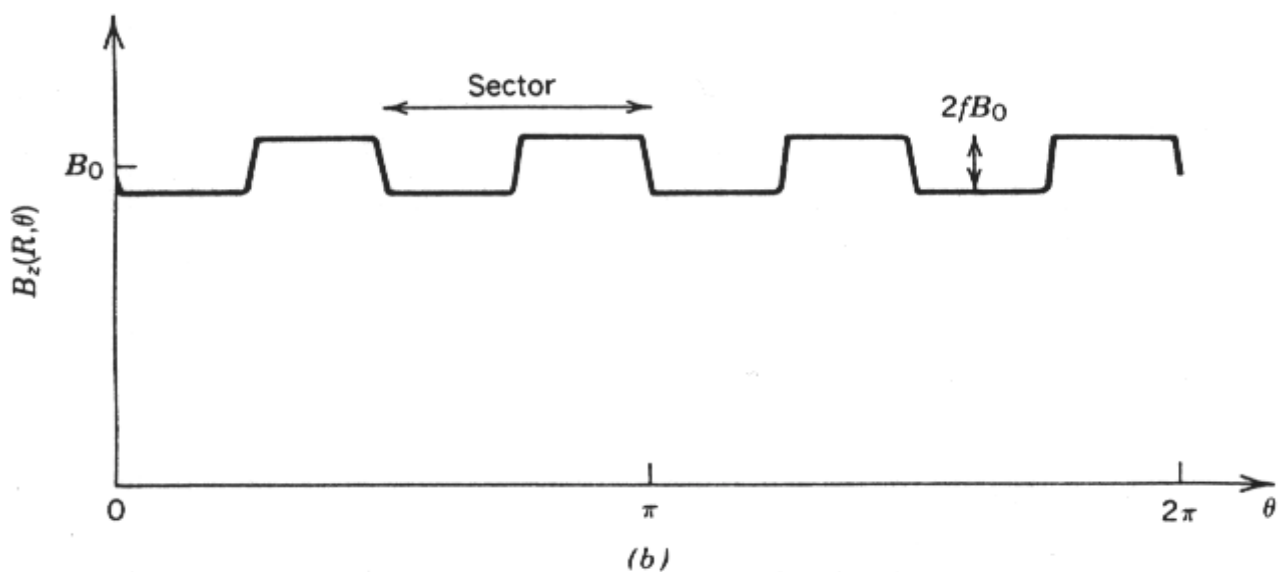
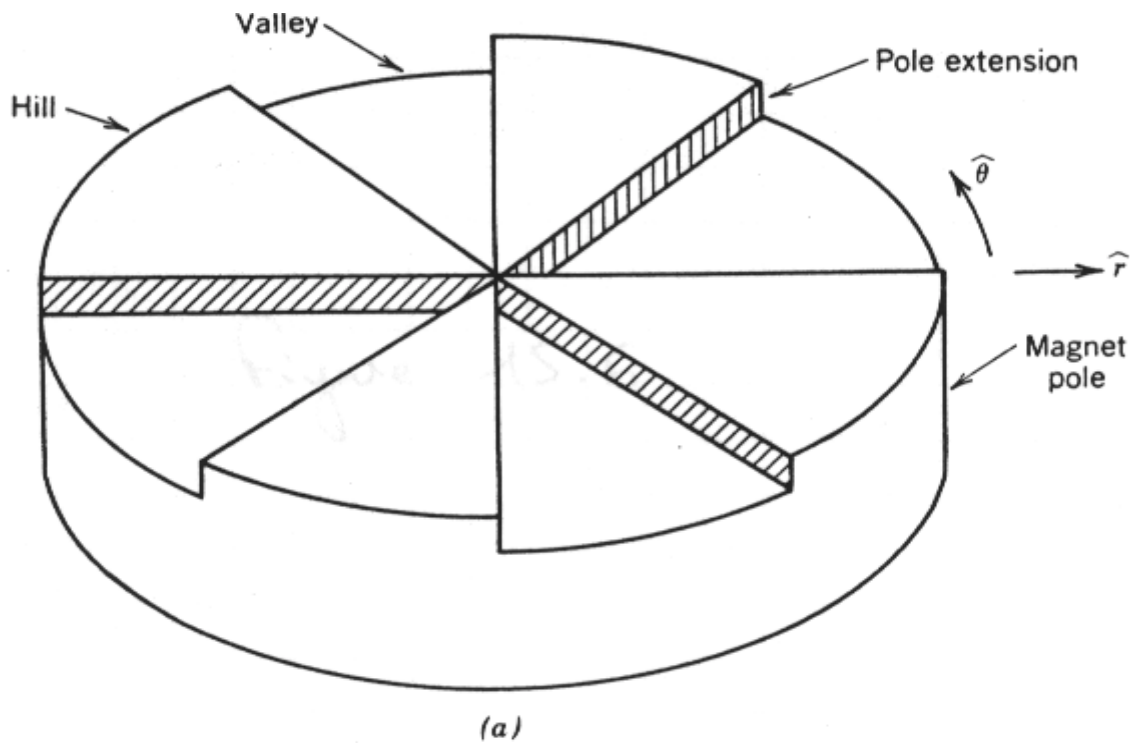
Pour des ions légers de plus haute énergie (ex: proton de 600 MeV), le facteur relativiste γ s'écarte sensiblement de 1. Un synchrocyclotron marche sur le même principe qu'un cyclotron mais la fréquence ω est ralentie durant le cycle d'accélération:

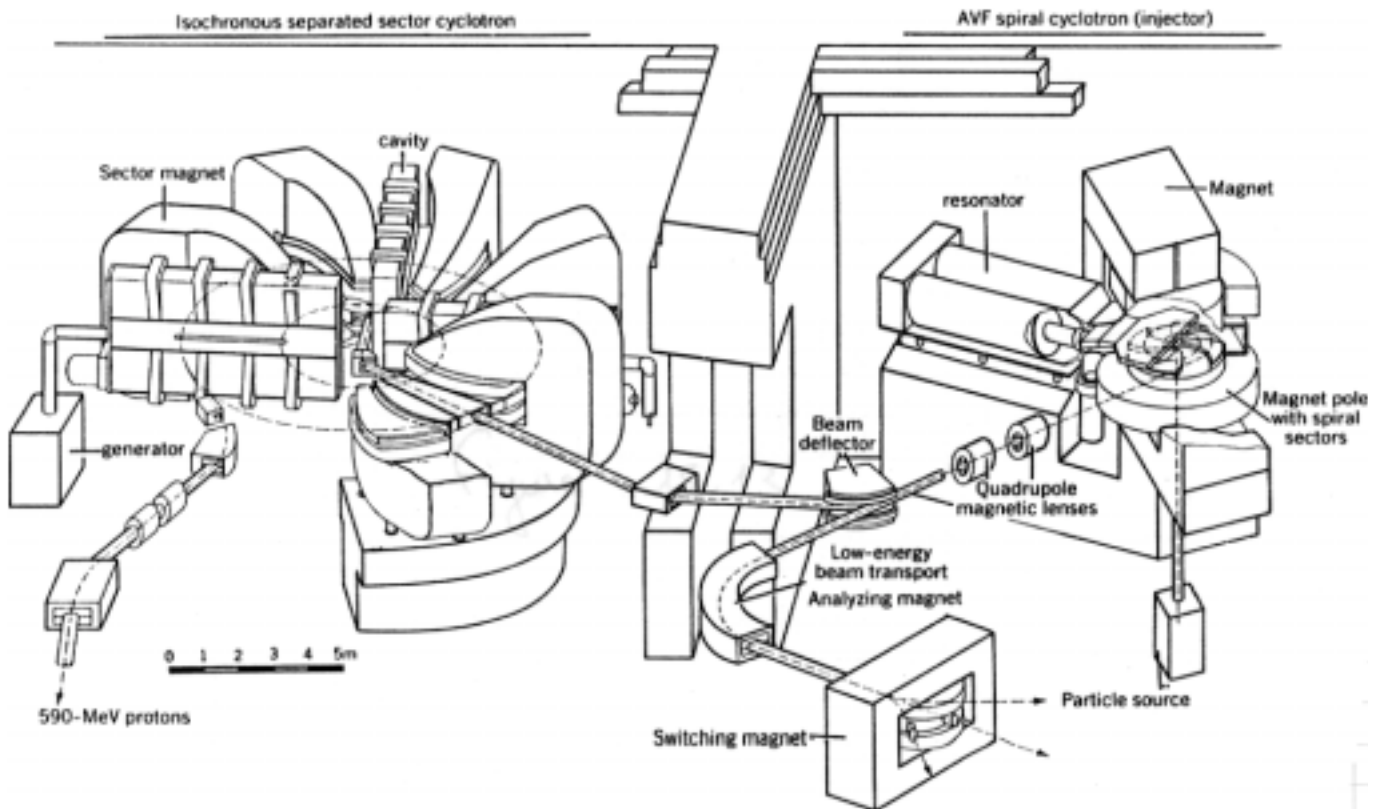
$$\omega = \frac{|q|B}{\gamma m_0}$$

Durant tout le cycle d'accélération, la machine ne peut accepter qu'un seul paquet d'ions. L'intensité des faisceaux délivrés par un synchrocyclotron est donc beaucoup plus faible.

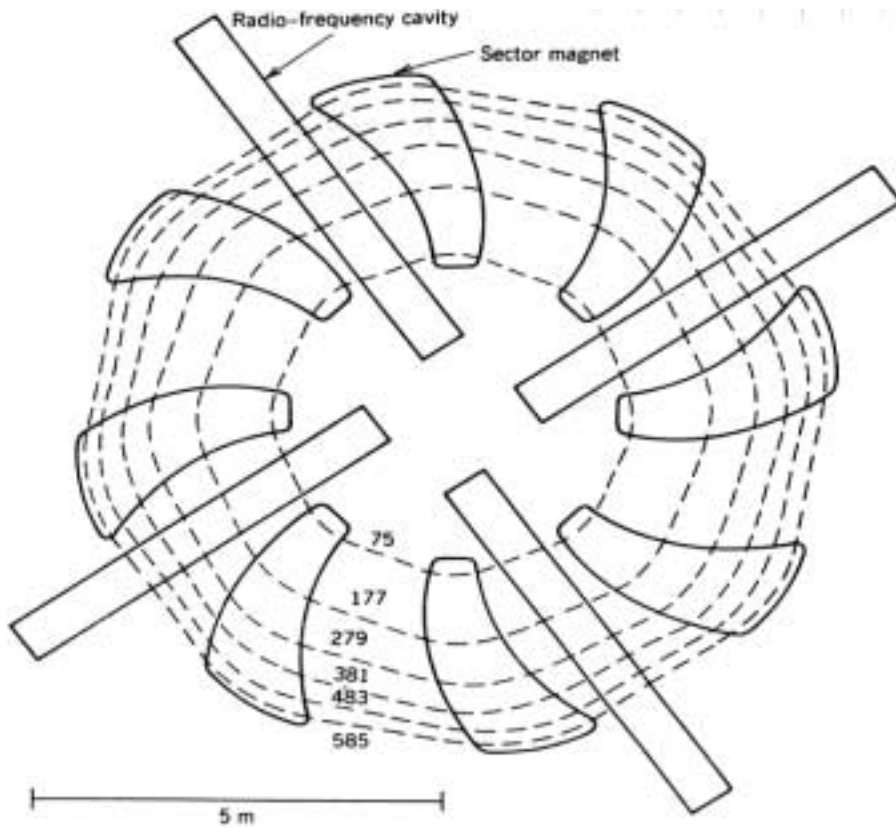
5.3 Cyclotrons isochrones à champ variable en azimut :

Les cyclotrons modernes utilisent des aimants à champs variables qui permettent de rendre isochrones les orbites des particules. Leur fréquence HF est fixe. Ce sont donc des machines à forts courants. Le champ vertical qui croît en fonction du rayon pour limiter la circonférence de l'orbite, crée un champ radial défocalisant dans la direction verticale. La focalisation verticale dans ces machines est obtenue en faisant varier brutalement le champ dans la direction azimutale par l'emploi de secteurs.





AVF = Azimuthally -Varying Field



Paramètres du cyclotron de 590 MeV de la SIN à Zurich

Cyclotron d'injection

Configuration	cyclotron à champ azimutal variable
rayon d'injection	1,5 cm
rayon d'extraction	105 cm
diamètre des pôles	250 cm
champ magnétique max.	1,65 T
nombre de secteurs	4
puissance de l'aimant	500 kW
fréquence HF	4,6 – 17 MHz
gain max. d'énergie par tour	160 keV/tour
énergie des protons	10 – 72 MeV
courant extrait	170 μ A

Cyclotron à secteurs séparés de 590 MeV

rayon d'injection	210 cm
rayon d'extraction	445 cm
champ magnétique max.	2,09 T
champ moyen à l'extérieur	0,87 T
nombre de secteurs	8
puissance de l'aimant	670 kW
nombre de cavités d'accélération	4
gain max. par tour	2,2 MeV / tour
puissance HF	800 kW

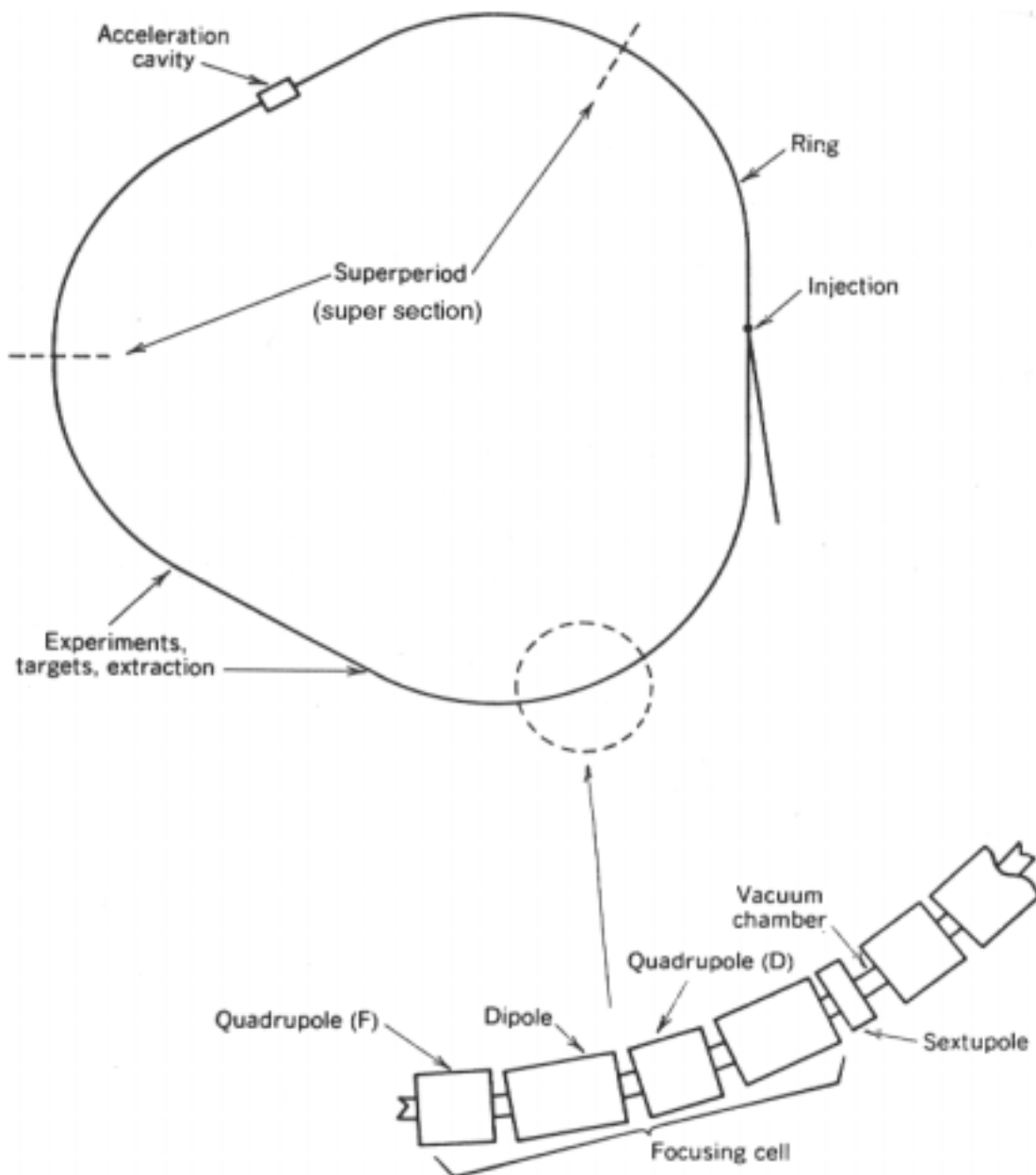
5.4 Synchrotrons :

Actuellement, les synchrotrons sont les accélérateurs qui permettent d'atteindre les énergies les plus élevées dans le centre de masse des collisions hadroniques ou leptoniques. Pour les collisionneurs e^+e^- tel que LEP, il est bien probable que l'énergie maximale ait été atteinte du fait de l'énorme puissance dissipée par rayonnement synchrotron (17 MW pour LEP200). Seuls les collisionneurs à deux linacs séparés permettraient d'envisager une augmentation de l'énergie disponible dans des collisions e^+e^- au delà de 200 GeV. Cela passe par le développement de guides d'ondes appropriés à forts gradients d'accélération (20 – 40 MV/m) et faibles pertes thermiques (Q très élevé). Une autre piste qui n'en est qu'à un stade de développement conceptuel serait le remplacement des électrons par des muons (200 fois plus lourds, $16 \cdot 10^8$ fois moins radiatifs).

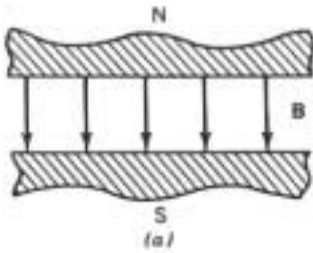
Pour les protons, le rayonnement synchrotron ne constitue pas la limitation dans la course aux hautes énergies. Celle-ci provient du champ magnétique maximal atteint dans les aimants supraconducteurs actuels (environ 9 T).

Au-dessus d'un diamètre de 4 m, les aimants monolithiques des synchrocyclotrons sont technologiquement et économiquement inaccessibles (la situation est comparable pour les cyclotrons à secteurs séparés). Or pour des protons de 1 TeV maintenus sur orbite par un champ de 4,2 T, le rayon de courbure gyromagnétique est de 789 m (Tevatron de FNAL aux USA) !

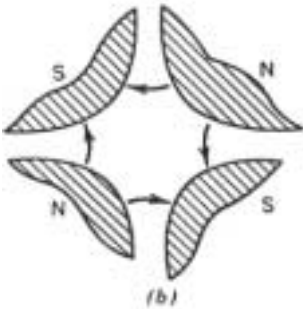
La solution consiste à produire le champ magnétique requis localement sur l'orbite des particules à l'aide de dipôles placés autour du tube à vide du faisceau. L'orbite de la machine devient donc fixe et le champ magnétique de courbure variable. Nous verrons également que cela conduit à une fréquence HF accélératrice variable. La disposition conceptuelle d'un synchrotron est donnée dans la figure qui suit :



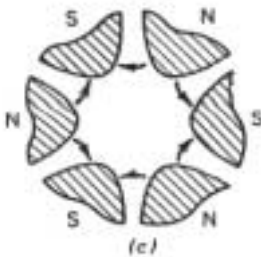
Une cellule de focalisation (ou confinement) est constituée de :



dipôles assurant le maintien sur orbite



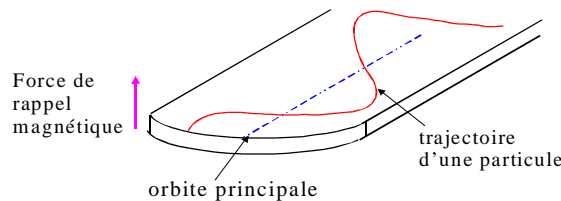
quadripôles de focalisation transverse



Sextupôles pour accroître la focalisation du faisceau

Les machines du type précédent sont appelées synchrotrons à fonctions séparées car chaque élément de la machine assure une fonction et une seule. Ce sont les machines les plus souples et qui permettent d'atteindre les énergies les plus élevées . En revanche , leur cycle de fonctionnement est complexe.

Les synchrotrons peuvent être classés selon leur principe de focalisation de leur faisceau . Un champ magnétique focalisant donne naissance à des oscillations dans le mouvement transverse des particules appelées oscillations bétatron (car découvertes auprès d'un bétatron qui est un accélérateur circulaire à électrons non-traité dans ce cours). Pour saisir l'origine de ces oscillations on peut utiliser une analogie avec le mouvement d'une bille dans un canal concave. Si la bille a originellement une quantité de mouvement transverse à l'axe du canal, la bille en se déplaçant oscillera dans le plan transverse à cet axe sous l'effet d'une force de rappel gravitationnelle. La force de rappel magnétique exercée par les quadripôles donne naissance à un mouvement comparable si les particules orbitant ont une quantité de mouvement transverse .



La longueur d'onde des oscillations betatron ne doit pas être un multiple de l'une des dimensions de la machine. Sinon on peut obtenir une amplification résonante de ces oscillations qui conduit à la perte du faisceau .

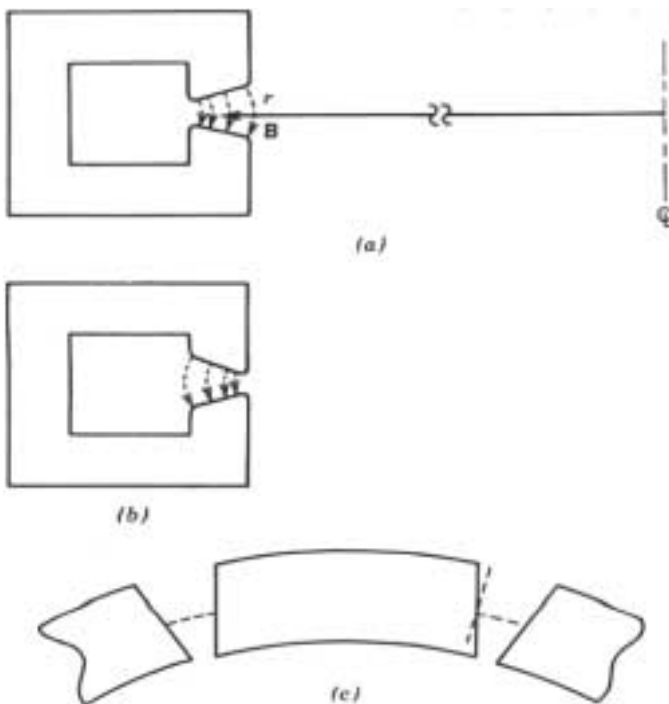
synchrotron à focalisation faible

Le champ de focalisation est à gradient faible. Cela conduit à des oscillations de fortes amplitudes qui requièrent une taille transverse importante du tube à faisceau et de l'entrefer des aimants. Comme l'amplitude des oscillations croît avec l'énergie des particules, ces machines ne peuvent être conçues au-delà d'une énergie de 10 GeV pour des protons.

synchrotron à focalisation forte

Le champ de focalisation est à fort gradient. L'amplitude des oscillations bétatron est limitée (à condition d'éviter les résonances) ce qui permet d'utiliser des aimants de dimensions raisonnables et donc d'accroître l'énergie de la machine. Tous les synchrotrons actuels marchent selon ce principe.

synchrotron à gradient alterné



La focalisation forte est obtenue en disposant alternativement sur la circonférence de la machine des aimants à double fonction (courbure+ focalisation) selon la figure présentée ci-contre (synchrotron AGS (Alternate Gradient Synchrotron) de Brookhaven).

Nous allons maintenant déterminer les relations qui relient l'énergie des particules (ou leur quantité de mouvement) au champ magnétique et à la fréquence HF .

Soit:

- δ la dimension de l'interstice d'accélération ;
- V_0 la tension maximale appliquée sur ce gap ;
- Φ_s la phase de synchronisation de la machine ;
- p_s la quantité de mouvement de la particule en phase ;
- v_s sa vitesse .

La force accélératrice appliquée sur cette particule est :

$$F = q E = q V_0 \frac{\sin(\Phi_s)}{\delta}$$

Le gain en quantité de mouvement est donné par :

$$\Delta p_s = (q V_0 \frac{\sin(\Phi_s)}{\delta}) (\frac{\delta}{v_s}) \quad \text{où} \quad \frac{\delta}{v_s} = \Delta t$$

ou encore : (pour une machine circulaire)

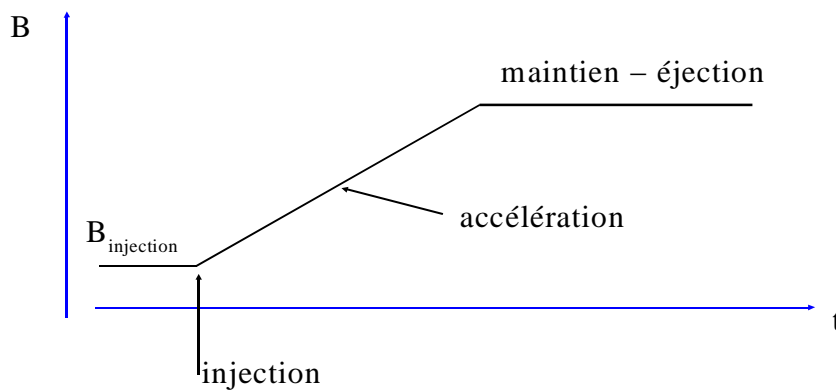
$$\frac{\Delta p_s}{\Delta t_r} \simeq \frac{d p_s}{d t} = (q V_0 \sin(\Phi_s) / \delta) (\delta / v_s) / (2 \pi R / v_s) \quad \text{avec} \quad \Delta t_r = 2 \pi R / v_s \quad (\text{temps de révolution})$$

qui se simplifie sous la forme :

$$\frac{d p_s}{d t} = \frac{q V_0 \sin(\Phi_s)}{2 \pi R}, \quad \text{d'où:} \quad p_s(t) = p_{s0} + \frac{q V_0 \sin(\Phi_s)}{2 \pi R} t$$

avec p_{s0} étant la quantité de mouvement à l'injection.

Et puisque $p_s(t) = 0,3 z B(t) R$ du fait du maintien sur l'orbite des particules par le champ magnétique, on obtient que le champ magnétique est une fonction linéaire du temps (à V_0 constante) dans un synchrotron .



La fréquence de révolution est reliée à la fréquence HF par : $\omega_{HF} = M \omega_r$, où M est le nombre de paquets de particules sur orbite . D'autre part , on a :

$$\omega_r = \frac{q B}{\gamma_s m} \quad \text{avec} \quad \gamma_s = (\sqrt{1 - (v_s/c)^2})^{-1},$$

d'où

$$\omega_{HF} = \frac{q M B}{\gamma_s m}$$

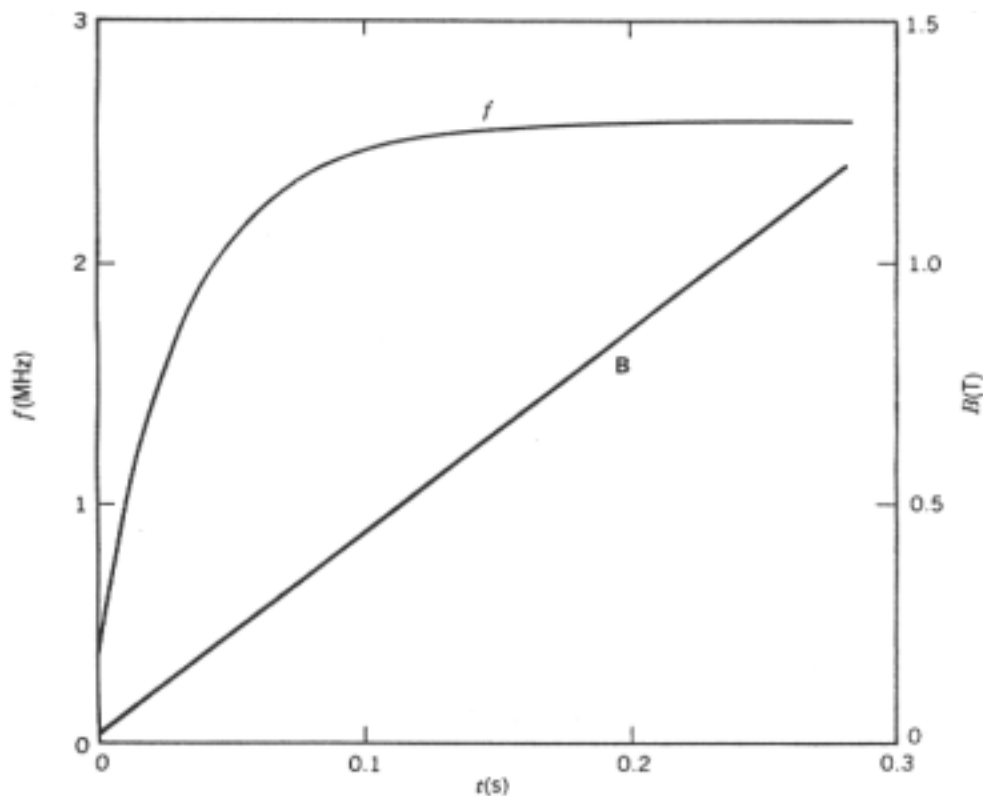
et puisque :

$$\gamma_s = E_s / m = \frac{\sqrt{p_s^2 + m^2}}{m} = ((q B R / m)^2 + 1)^{1/2} ,$$

on obtient finalement :

$$\omega_{HF} = \frac{q M B / m}{(1 + (q B R / m)^2)^{1/2}} .$$

Puisque B est une fonction linéaire de t , ω_{HF} ne croît pas linéairement avec le temps. Pour une différence de potentiels V_0 donnée dans la cavité accélératrice et un rayon R connu, on connaît la pente en temps du champ magnétique et la fonction d'évolution de la fréquence HF.



Dans les synchrotrons, le mouvement radial des particules est sujet à des oscillations autour de l'orbite moyenne provenant des fluctuations de la phase de la HF accélératrice. Une variation de la phase de la HF entraîne en effet une variation de la quantité de mouvement des particules en orbite qui à son tour se traduit par une modification du rayon de l'orbite. Ce phénomène porte le nom d'oscillations synchrotron.

6 Collisionneurs :

Pour augmenter l'énergie disponible dans le centre de masse, le mode de collision sur cible fixe devient très vite inadapté. L'énergie disponible dans le centre de masse de deux particules ultra-relativistes de mêmes masses (m) diffusant dans une configuration où l'une se trouve au repos et l'autre emporte une énergie E est:



$$E_{cm}^f = \sqrt{2mE}$$

En mode collisionneur et si chaque particule a une énergie E , l'énergie disponible dans le centre de masse est:

$$E_{cm}^c = 2E$$

Ainsi fonctionner en mode collisionneur apporte un gain d'énergie disponible dans le CM de:

$$\frac{E_{cm}^c}{E_{cm}^f} = \frac{2E}{\sqrt{2mE}} = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \text{ soit un gain de 625 pour LEP200 et 122 pour le LHC .}$$

On comprend donc pourquoi la physique des très hautes énergies s'est rapidement intéressée au développement de collisionneurs e^+e^- puis de collisionneurs $p\bar{p}$ (pp pour LHC). Un des problèmes majeurs que posent les collisionneurs est la réalisation de la zone d'interaction des faisceaux. Pour atteindre une luminosité adéquate, la focalisation des faisceaux au point d'interaction doit être particulièrement efficace.

D'une manière générale, la luminosité est définie par la relation suivante (pour un collisionneur $p_1 p_2$):

$$\frac{dN}{dt}(p_1 p_2 \rightarrow X) = \sigma(p_1 p_2 \rightarrow X) \cdot L$$

où:

L est la luminosité (en $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$),

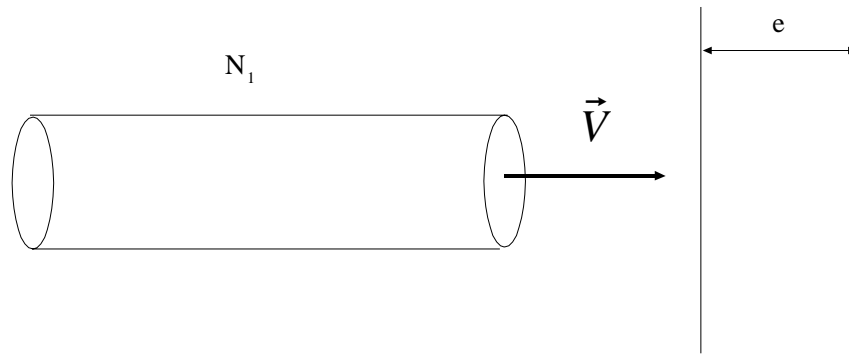
$\frac{dN}{dt}(p_1 p_2 \rightarrow X)$ est le taux de réactions $p_1 p_2 \rightarrow X$

$\sigma(p_1 p_2 \rightarrow X)$ est la section efficace de la réaction $p_1 p_2 \rightarrow X$

On définit également la luminosité intégrée par :

$$N = \sigma \bar{L} \text{ avec } N \text{ étant le nombre total de réactions } p_1 p_2 \rightarrow X .$$

Nous allons examiner la façon dont se calcule la luminosité dans quelques cas typiques:

Diffusion sur une cible fixe :

Si:

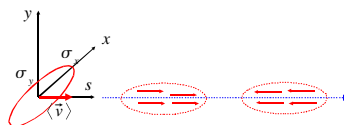
 f est la fréquence des paquets ; N_1 est le nombre de particules p_1 par paquet ; e est l'épaisseur de la cible fixe ; ρ est la masse volumique de la cible ; M est la masse atomique de la cible ; N est le nombre d'Avogadro ;

alors:

$$L = f N_1 \frac{e \rho}{M} N$$

exemple : p sur p , 10^{11} p / paquet , 10 cm d' H_2 liquide , $f = 300$ Hz $L = 12 \cdot 10^{36} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

C'est beaucoup plus que ce que l'on obtient actuellement sur un collisionneur.

Cas idéal de collision frontale entre 2 faisceaux parfaitement parallèles et de sections transverses Gaussiennes et identiques :

Une définition plus covariante de la luminosité utilise les quadrivecteurs densité de courant:

$$J = (\rho(\vec{r}), \rho(\vec{r}) \vec{v}) \quad , \text{quadrivecteur densité de courant.}$$

On peut montrer que $J^2 = \rho_f(\vec{r})^2 c^2$ est conservé dans une transformation de Lorentz ($\rho_f(\vec{r})$ étant la densité de particules dans le référentiel lié au paquet)

On a: N (nombre de particules par paquet) $= \int_V \rho(\vec{r}) d\vec{r}$. V étant le volume du paquet.

Alors on a:
$$L = \frac{f_c}{c^2} \int d^4x J_1 \cdot J_2$$

où:

J_1, J_2 sont les quadrivecteurs densité de courant associés aux paquets de particules

$$p_1, p_2 \quad ;$$

f_c est la fréquence de collision.

C'est à partir de cette expression et en prenant des densités $\rho_1(\vec{r}), \rho_2(\vec{r})$ correspondant aux cas considérés que toutes les expressions données dans la fin de chapitre ont été calculées.

Pour le cas d'une collision frontale, nous avons:

$$L_0 = \frac{f_c N_1 N_2}{4\pi \sigma_x \sigma_y}$$

où:

f_c est la fréquence de collisions;

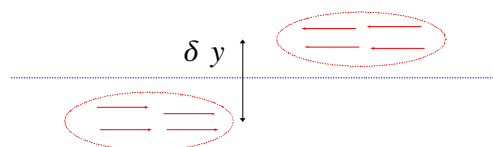
N_1, N_2 sont les nombres de particules dans les paquets;

σ_x, σ_y les écarts type transverses des paquets.

f_c est beaucoup plus grande sur un collisionneur circulaire que sur un collisionneur linéaire (SLC). De plus le nombre de particules que l'on peut mettre dans un même paquet est en général limité par les effets de répulsion coulombienne. On en déduit que pour atteindre la même luminosité, un collisionneur linéaire doit travailler avec des tailles transverses de faisceaux beaucoup plus faibles qu'une machine circulaire.

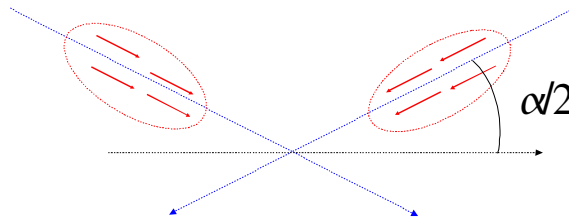
Si maintenant $\sigma_{x1} \neq \sigma_{x2}$, c'est à dire si les deux faisceaux n'ont pas les mêmes tailles transverses , la formule demeure mais on remplace $\sqrt{2} \sigma_x$ par $\Sigma = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2}$.

Les faisceaux ont un défaut d'alignement



$$L(\delta_x, \delta_y) = L_0 \exp\left(-\frac{\delta_x^2}{4\sigma_x^2} - \frac{\delta_y^2}{4\sigma_y^2}\right)$$

Les faisceaux se croisent avec un angle

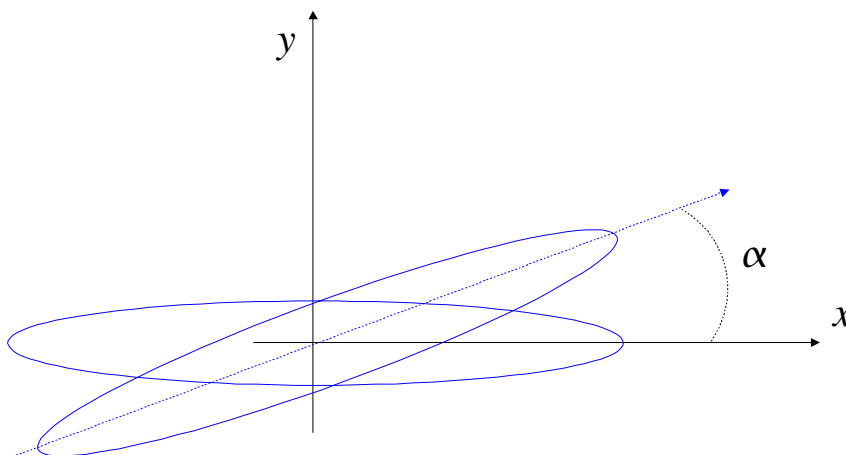


$$L(\alpha) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_z \operatorname{tg}(\alpha/2)}{\sigma_x}\right)^2}} \approx \frac{L_0}{(1 - \alpha^2/8\alpha_c^2)}$$

avec $\alpha_c = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$

LHC : $\alpha = 200 \mu\text{rad}$, $\alpha_c = 0,2 \text{ mrad}$, $L/L_0 = 0,88$

Les faisceaux sont asymétriques et tournés l'un par rapport à l'autre :



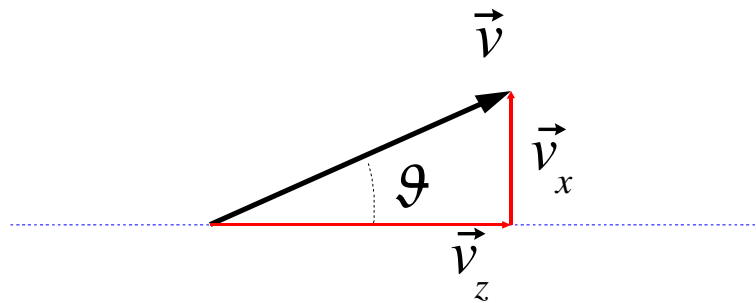
$R = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ rapport d'aspect

$$L(\alpha) = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \sin^2(\alpha)(R^2 - 2 + 1/R^2)/4}}$$

$$= L_0 \left(1 - \alpha^2 \frac{R^2}{8}\right) \quad \text{si } R \gg 1$$

Les faisceaux ne sont pas parallèles

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des faisceaux à enveloppes parallèles : c'est ce que l'on appelle des faisceaux à émittance nulle. L'émittance est une grandeur qui mesure le parallélisme d'un faisceau, ou plutôt son défaut de parallélisme. En pratique, les faisceaux ne sont jamais totalement parallèles car les particules qui les composent ont une certaine distribution de quantité de mouvement transverse.



$$\sin \vartheta = \frac{v_x}{v_z} \quad \text{si } \vartheta \text{ très petit alors, } \vartheta = \frac{v_x}{v_z}$$

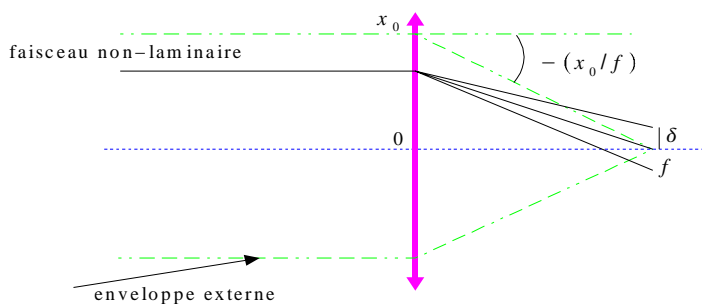
Dans l'espace des phases, le faisceau est représenté par l'ensemble des points de coordonnées:

$$\{x^i, v_x^i, y^i, v_y^i, z^i, v_z^i\} .$$

Les concepteurs d'accélérateurs préfèrent souvent utiliser une autre représentation dans un espace connexe qu'ils nomment l'espace des traces et dans lequel les particules composant le faisceau ont les coordonnées suivantes:

$$\{x^i, x'^i, y^i, y'^i, z^i, \delta^i\} \quad \text{avec} \quad x'^i = \frac{v_x^i}{v_z^i}, \quad y'^i = \frac{v_y^i}{v_z^i} \quad \text{et} \quad \delta^i = \frac{E^i - E_0}{E_0}, \quad E_0 = \langle E^i \rangle .$$

Pour mieux comprendre ce que représente l'émittance et en donner sa définition, nous allons prendre un exemple. Il s'agit d'un faisceau à enveloppe quasi-parallèle mais dans lequel les particules ont une distribution en quantité de mouvement transverse de largeur non-nulle. On ne traitera que le cas à une dimension transverse. Le faisceau passe dans un quadripôle qui agit comme une lentille convergente dans la dimension traitée.

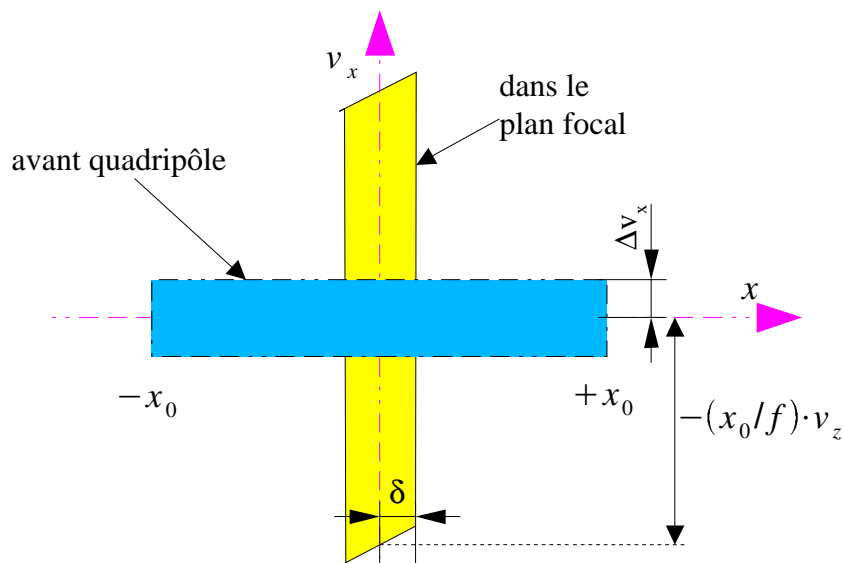


En amont du quadripôle, le faisceau présente un spectre de vitesse transverse ayant une largeur maximale Δv_x et une extension spatiale couvrant l'intervalle $[-x_0, x_0]$. En aval, la vitesse des particules est comprise entre $-(x_0/f) \cdot v_z$ et $+(x_0/f) \cdot v_z$. On souhaite maintenant connaître la valeur de l'extension maximale spatiale δ au point focal, sachant que c'est cette grandeur que l'on cherche à réduire au minimum. La surface de l'espace de phase délimitant le faisceau en amont du quadripôle est:

$$A_p = 4 x_0 \Delta v_x .$$

Dans le plan focal, cette surface devient:

$$A_f = 4 \delta \frac{x_0}{f} \cdot v_z .$$

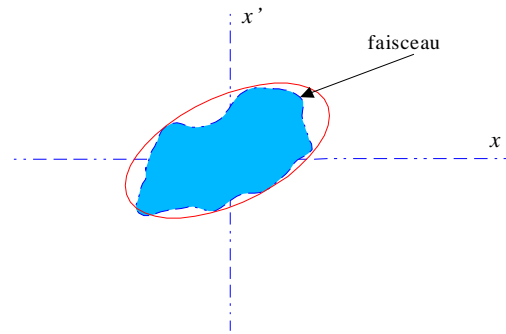


À condition que la densité de particules dans le faisceau soit forte, que les transformations mises en jeu soient réversibles et qu'il n'y ait pas de collision interne, on peut montrer (théorème de Liouville) que:

$$A_p = A_f \quad \text{d'où :} \quad \delta = \frac{\Delta v_x}{v_z} \cdot f .$$

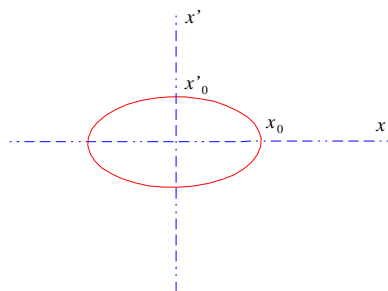
L'émittance est une mesure du volume (ou de la surface dans l'exemple précédent) de l'espace de phase occupé par le faisceau. Ce n'est pas exactement le volume occupé, mais plutôt un volume effectif qui englobe dans l'espace des traces tous les points représentant le faisceau. Par exemple pour un problème à une dimension, la tache réelle qui décrit le faisceau est enveloppée par une ellipse conformément à la figure suivante :

L'émittance dans ce cas est:



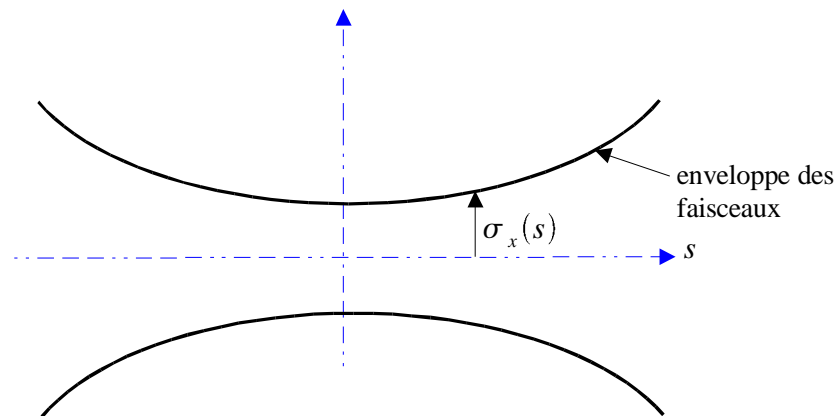
$$\epsilon_x = \iint_{\text{ellipse}} dx dx' / \pi$$

Si l'ellipse est droite comme dans la figure qui suit:



alors: $\epsilon_x = x_0 x'_0$ en unité π -m-rad , ou $\epsilon_x = \pi x_0 x'_0$ si π est omis dans la définition (en unité m-rad).

Pour en revenir au croisement de deux faisceaux convergents mais à émittance non-nulle:



La taille transverse de l'enveloppe des faisceaux est obtenue par la formule suivante :

$$\sigma_x(s) = \sqrt{\left(\beta_x^* + \frac{s^2}{\beta_x^*}\right) \cdot \epsilon_x}$$

, dans laquelle β_x^* est la profondeur de champ (mesure de l'intensité de la focalisation) dans la direction x (à ne pas confondre avec $\beta = v/c$). À $s=0$, c'est à dire au point de collision, la luminosité suit l'expression ci-dessous :

$$L_0 = \frac{f_c N_1 N_2}{4\pi \sqrt{\beta_x^* \epsilon_x} \sqrt{\beta_y^* \epsilon_y}} \quad \text{si } \beta^* \gg \sigma_z .$$

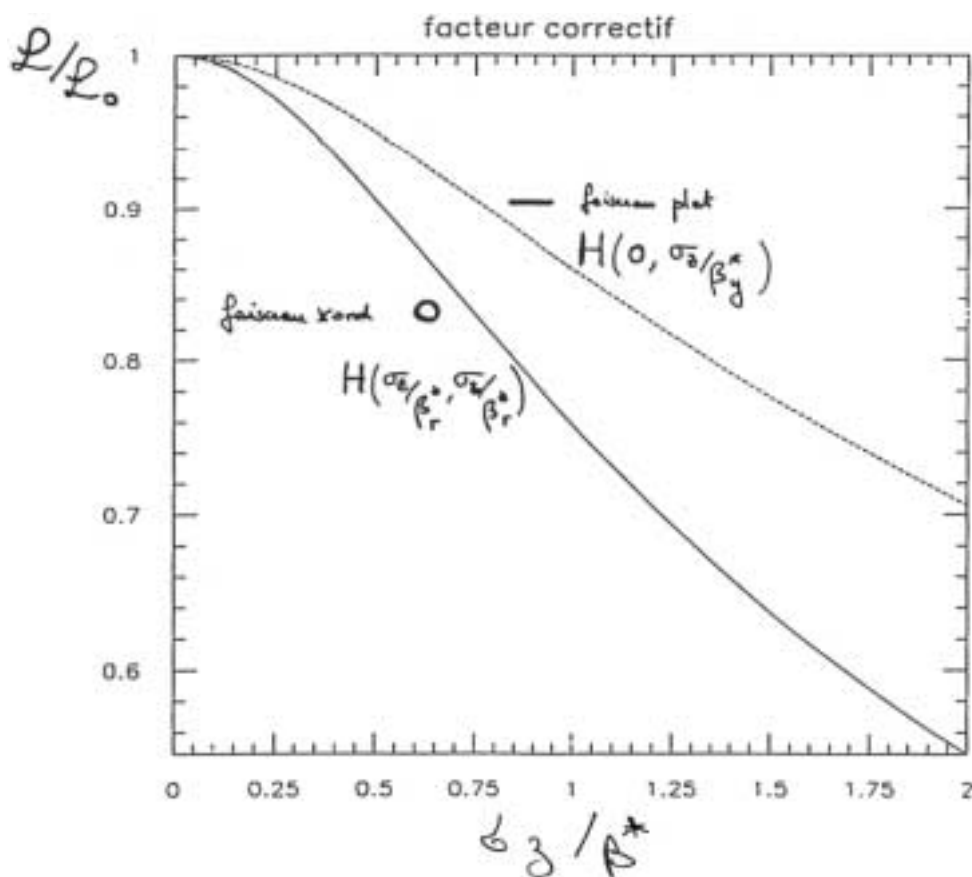
De plus , si le faisceau est rond , c'est à dire si $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y$ et $\beta_x^* = \beta_y^* = \beta^*$, la formule précédente se simplifie pour devenir :

$$L_0 = \frac{f_c N_1 N_2}{4\pi \beta^* \epsilon} .$$

Si la taille longitudinale du faisceau devient non-négligeable devant β^* , il faut tenir compte de corrections car le faisceau n'est pas focalisé au même point au même instant. Ces corrections sont procurées par la fonction H telle que:

$$L\left(\frac{\sigma_z}{\beta_x^*}, \frac{\sigma_z}{\beta_y^*}\right) = L_0 H\left(\frac{\sigma_z}{\beta_x^*}, \frac{\sigma_z}{\beta_y^*}\right)$$

qui est représentée dans le graphique ci-dessous .



Exemple : le LHC

Le temps séparant deux paquets est de 25 ns, ce qui correspond à une fréquence de collisions de 40 MHz. Il y a 10^{11} protons par paquet . L'émittance normalisée (notée ϵ^* avec $\epsilon^* = \beta \gamma \epsilon$) est de $3,75 \cdot 10^{-6}$ mrad. L'écart type de la répartition longitudinale du faisceau est de 7,5 cm et la profondeur de

champ des quadripôles au point de collision est de 0,5 m. Les faisceaux, tous deux constitués de protons, se croisent avec un angle de 200 μrad . Les faisceaux sont considérés comme étant ronds :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\epsilon \beta^*} = \sqrt{5 \cdot 10^{-10} \cdot 0,5} = 16 \mu\text{m} \quad \text{d'où : } L_0 = \frac{4 \cdot 10^7}{4\pi} \frac{10^{22}}{0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = 1,27 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

L'angle de croisement réduit légèrement la luminosité en accord avec la formule suivante :

$$L(\alpha) = L_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{8\alpha_c^2}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha_c = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{16}{75000} = 0,213 \text{ mrad}$$

d'où finalement :

$$L(0,2) = L_0 \left(1 - \frac{0,2^2}{8 \times 0,213^2}\right) = 1,1 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

6.1 Refroidissement des faisceaux d'antiparticules :

L'émission des faisceaux joue un rôle crucial pour l'obtention d'une haute luminosité sur un collisionneur. On peut comprendre qu'il faut que cette grandeur soit minimisée à la source ou tout du moins dans les premiers étages du système. Cela est aisé quand il s'agit de particules de matière (e^- , p ..) qui existent au repos. C'est plus délicat pour les faisceaux d'antimatière (e^+ , antiproton, ..) qui sont des produits secondaires. Il faut "refroidir" ces faisceaux avant de les accélérer.

Cas des positons :

Leur refroidissement utilise les propriétés du rayonnement synchrotron. Les positons perdent beaucoup d'énergie par rayonnement synchrotron. La puissance émise croît comme la puissance quatrième de leur énergie. Les positons les plus énergétiques perdent ainsi plus d'énergie que les positons lents. À chaque tour chaque positon reçoit la même quantité de mouvement des cavités accélératrices. Au total on obtient une réduction de la largeur du spectre en énergie longitudinale des positons.

L'amortissement de la vitesse transverse provient du rayonnement synchrotron induit par les oscillations bêta (ou les forces de rappel magnétiques des quadripôles).

Le refroidissement des positons est réalisé dans des machines circulaires spéciales situées dans les premiers étages d'accélération. Le temps de refroidissement pour des positons de 1 GeV dans un anneau de 20 m de diamètre est d'environ 20 ms.

Cas des antiprotons :

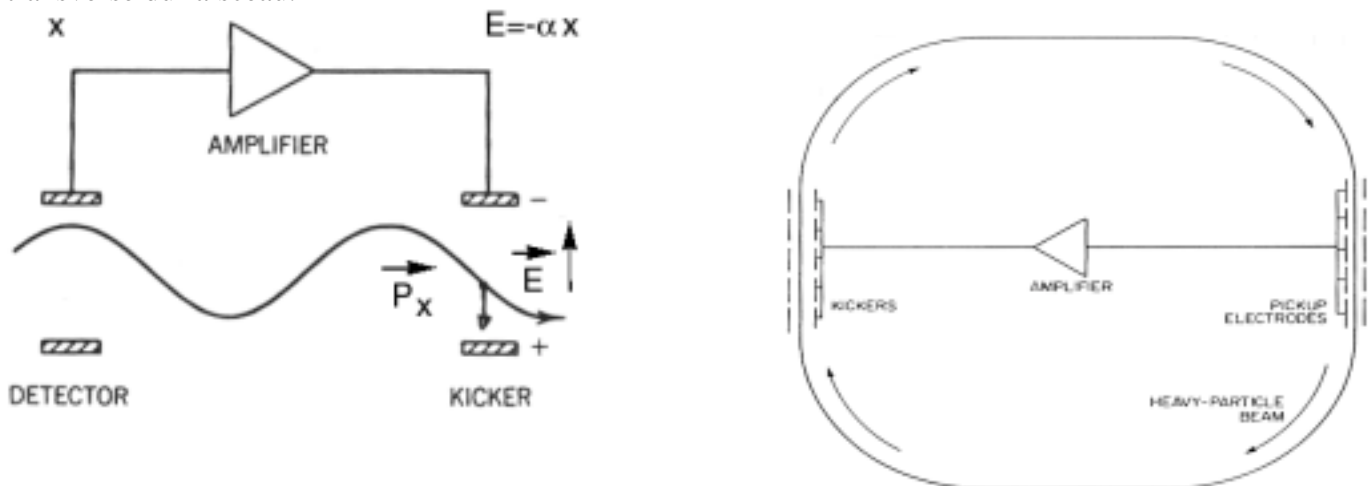
Ils sont peu sujets au rayonnement synchrotron. Ils existent deux possibilités pour réduire la "température" des antiprotons: le refroidissement stochastique (ou bêta), utilisé au premier stade du refroidissement, et le refroidissement par électrons qui permet de baisser notablement plus la "température" du faisceau.

Refroidissement stochastique

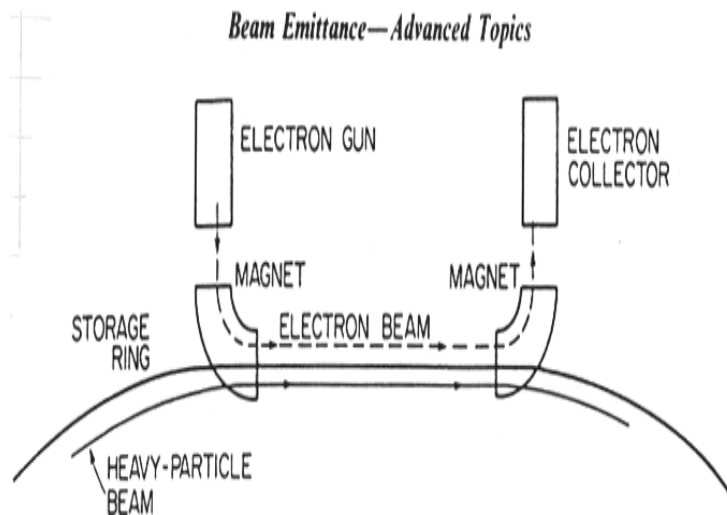
Un détecteur de position mesure l'excursion transverse du faisceau circulant dans un anneau de stockage et transmet un signal de correction à un "kicker" situé à une distance $(n+1) \frac{\lambda_b}{4}$ en aval, où

λ_b est la longueur d'onde des oscillations bêta dans l'anneau. Si le faisceau stochastiquement passe par un maximum d'élongation sur le détecteur de position, alors sa quantité de mouvement sera maximale à l'emplacement du "kicker". Une impulsion électrique proportionnelle à la position transverse mesurée permet alors de réduire la largeur de la distribution de la quantité de mouvement

transverse du faisceau.



Refroidissement par électrons



Sur une section droite d'un anneau de stockage, on injecte de façon synchrone un faisceau d'électrons "froids" circulant à la même vitesse que les antiprotons. Les aimants de déviation agissent sur les électrons sans perturber les antiprotons qui portent une quantité de mouvement beaucoup plus grande (m_p/m_e). Les électrons sont mis en contact "thermique" avec les antiprotons par l'effet des forces coulombiennes. L'énergie "thermique" excédentaire du faisceau d'antiprotons est progressivement transmise au faisceau d'électrons qui est constamment renouvelé à la source froide.

7 Pour en savoir plus

- Principles of charged particle acceleration , Stanley Humphries , John Wiley & sons (1986)
- Charged particle beams , Stanley Humphries , John Wiley & sons (1990)
- Particle accelerator physics , Helmut Wiedemann , Springer – Verlag (1993)
- Principles of cyclic particle accelerators , Johan J. Livingood , D. Van Nostrand Company (1961)