Cours de physique nucléaire

Structure Nucléaire

Abdeslam Hoummada (a.hoummada@fsac.ac.ma)

Faculté des Sciences Ain Chock **http://ruphe.fsac.ac.ma**

Année 2007-2008

1 INTRODUCTION

Notions de base

INTRODUCTION

Pour avoir une image du noyau nous devons commencer par définir ses principales caractéristiques dont on peut citer :

- Masse, charge, spin, moment magnétique,...
- $Noyau = N_{neutrons} + Z_{protons}$ c'est à dire $A = Z + N$

neutron : $M_n = 939.57 MeV$, charge $q = 0$ et spin : $s = \frac{1}{2}$
proton : $M_p = 939.57 MeV$, charge $q = 0$ et spin : $s = \frac{1}{2}$
Supposons que le noyau soit sphérique, son volume va dépendre de son rayon R. La valeur du rayon R dépend de la méthode expérimentale.

- Diffusion des neutrons
- Diffusion des électrons ou des muons μ ou des alphas α

le volume nucléaire est proportionnel au nombre de nucléons dans le noyau, ce-ci a pour conséquence :

- La densité nucléaire est constante pour tous les noyaux
- la matière nucléaire est incompressible

$VA \leftrightarrow V = kA \leftrightarrow R = R_{\circ} A^{\frac{1}{3}}$

La structure du noyau

Le noyau d'un atome est constitué de protons et de neutrons qui portent le nom de nucléons.

- Noyau ou nuclide noté ${}_{Z}^{A}X$
- A est le nombre de masse
- Z est le numéro Atomique
- $A = Z + N$ est le nombre total de nucléons
- Isotope Même nombre de protons nombre de neutrons différent ${}_{6}^{12}C$ (98.9%), ${}_{6}^{13}C$ (1.1%), ${}_{6}^{14}C$

Les masses des atomes sont presque des multiples entiers de la masse de l'atome d'hydrogène. La valeur précise de la masse d'un isotope s'exprime en fonction de l'unité de masse atomique (u).

Definition

Par définition, la masse de l'atome neutre de l'isotope ${}_{6}^{12}C$ du carbone est égale exactement à 12 u.

$$1u = 1.66054x10^{-27}\ kg = 931.5MeV/c^2$$

Le dernier terme provient de la relation mass-énergie : $E = mc^2$

- masse du proton
  $m_p = 1.67264x10^{-27}kg = 1.007276u = 938.28MeV/c^2$
- masse du neutron
  $m_n = 1.675x10^{-27}kg = 1.008665u = 939.57MeV/c^2$
- masse de l'électron
  $m_e = 9.109x10^{-31}kg = 5.4858x10^{-4}u = 0.511MeV/c^2$

Trouver la valeur de l'unité de masse atomique à partir du nombre d'avogadro.
Une mole de ${}^{12}_{6}C$ contient N_A atomes : 12 g correspondent à $12N_Au$: $1u = \frac{1g}{N_A} = \frac{1g}{6.022136x10^{23}} = 1.66054x10^{-27}kg$
Exprimer l'unité de masse atomique en fonction de son équivalent en énergie
$E = mc^2$ donne $1u = (1.66054x10^{-27}kg)(2.9979x10^8m/s)^2 = 1.4924x10^{-10}J = 931.5MeV$ Ainsi $1u = 931.5MeV/c^2$

Dimension du noyau

$$\rho = \frac{mA}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Le rayon nucléaire varie entre : $2.10^{-13}cm$ et $10.10^{-13}cm$ avec $1fm = 10^{-13}cm$

Densité de nucléons :

$$n = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 10^{38}N/cm^3$$

Densité de matière :

$$\rho = 938.10^{38}MeV/cm^3 = 1.710^{11}kg/cm^3$$

- rayon du noyau : $10^{-12}cm$
- rayon de l'atome : $10^{-8}cm$

$$\frac{R_{Atome}}{R_{Noyau}} = 10^4$$

Dimension du noyau

$$R = 1.2A^{\frac{1}{3}}\ fm$$

Avec $1fm = 10^{-15}\ m$
Comme le volume d'une sphère est proportionnel à R^3, on voit que le volume est proportionnel à A

Example

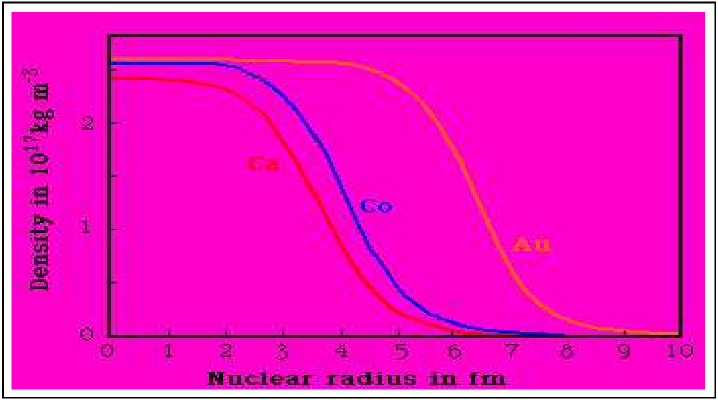
Quelle est la masse volumique d'un noyau type, par exemple $^{16}_{8}O$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3}(1.2x10^{-15})^3 A = 1.16x10^{-43} m^3$$

La masse d'un atome d'oxygène ($A = 16$) est 16 u. La masse volumique est :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{(16)(1.66054x10^{-27}kg/u)}{(1.16x10^{-43}m^3)} = 2.29x10^{17}kg/m^3$$

Cette valeur est plus de 10^{14} fois supérieure à la masse volumique de l'eau.
la masse volumique ne dépend pas de A.
La densité est à peu près la même pour tous les noyaux.
De telles valeurs de masses volumiques sont observées dans les étoiles à neutrons.



L'énergie de Liaison et la stabilité du noyau :

La masse d'un noyau stable est toujours inférieure à la somme des masses de ses nucléons d'une certaine quantité Δm, qu'on nomme défaut de masse.
Si on veut séparer complétement les nucléons d'un noyau stable, il faut fournir au noyau une quantité minimale d'énergie, appelée énergie de liaison (E_l).

$$E_l = \Delta mc^2$$

Cas du deuteron : $m_p = 938.28Mev$, $m_n = 939.57Mev$ et $m_p + m_n = 1877.85MeV$

$$\Delta E = m_p + m_n - m_d = 2.22MeV$$

L'énergie de liaison d'un nuclide ${}^{A}_{Z}X$ comprenant Z protons et N neutrons vaut donc :

$$E_l = [(Zm_p + Nm_n) - m_{noyau\ x}]c^2$$

Où $m_{noyau\ x}$ est la masse du noyau en question.

En prenant la masse de l'atome neutre y compris les électrons si on désigne par m_x la masse de l'atome neutre, l'énergie de liaison s'exprime par :

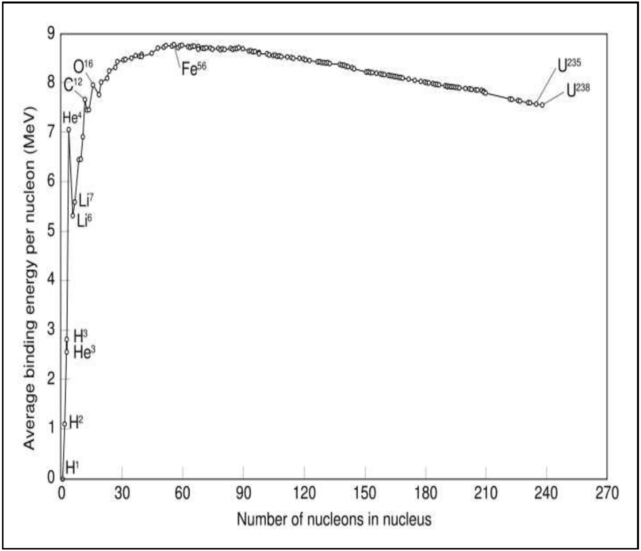
$$E_l = [(Zm_p + Nm_n) - (m_x - Zm_e)]c^2$$

Or $m_p + m_e = m_H$, la masse de l'atome neutre d'hydrogène :

$$E_l = [Zm_H + Nm_n - m_x]c^2$$

Example

Quelle est l'énergie de liaison moyenne par nucléon de l'atome ${}^4_2He$. Calculer l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour ${}^{12}_6C$.
La masse de ${}^4_2He$ neutre est 4.002604 u. $\Delta m =$
$2m_H + 2m_n - m_{He} = (2x1.007825) + (2x1.008665) - 4.002604 =$
$0.030376u \quad 1u = 931.5MeV/c^2 \Rightarrow \quad E_l = \Delta mc^2 = 28.3MeV$
$\frac{E_l}{A} = 28.3Mev/4 = 7.1Mev$
$E_l = [(6x1.007825u) + (6x1.008665u) - 12u)](931.5Mev/u) =$
$92.163Mev$ Donc $\frac{E_l}{A} = 7.68Mev$


Average binding energy per nucleon (MeV)
Number of nucleons in nucleus
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
30
60
90
120
150
180
210
240
270
H¹
H²
H³
He³
Li⁶
Li⁷
He⁴
C¹²
O¹⁶
Fe⁵⁶
U²³⁵
U²³⁸

Modèle de la goutte liquide

En première approximation le rayon nucléaire varie suivant la loi

$$R = r_{\circ}A^{frac13}$$

et le volume :

$$V = \frac{4}{3}\pi r_{\circ}^{3}A$$

- Le volume occupé par nucléon : $\frac{V}{A} = \frac{4}{3}\pi r_{\circ}^{3}$
- L'énergie de liaison par nucléon : $\frac{B}{A} = 8MeV = Cste$
- Densité nucléaire : $d = \frac{M}{V} = Cste$

ces trois quantités sont indépendantes du nombre de masse A, ainsi que du volume V du noyau. Comparaison avec une goutte liquide :

Pour une goutte liquide :

- L'énergie d'évaporation pour une molécule est indépendante du volume total ou de la masse de la goutte
- La densité est constante quel que soit le volume

D'autre part les forces nucléaires pour des distances de l'ordre de 0.3 fm deviennent répulsives.

De même pour une goutte liquide, en comprimant une goutte liquide, les forces de cohésion deviennent répulsives.

1. Energie de volume : Par analogie avec une goutte liquide, l'énergie de liaison d'un noyau doit être proportionnelle au nombre de ses constituants, c'est à dire au nombre de masse A. $\frac{B}{A} = Cste \rightarrow B = a_v A$ où a_v est une constante. Or il faut tenir compte de certains effets tels que :
   - Les effets de surface dûs à la chute de la densité nucléaire aux bords
   - La répulsion coulombienne des protons, qui croit à mesure que Z augmente
2. L'énergie de surface: La densité de la matière nucléaire diminue vers la surface. Les nucléons à la surface sont soumis à une interaction nucléaire moins importante que ceux du centre. $a_v A$ surestime l'énergie de liaison du noyau . Le déficit énergétique doit être proportionnel au nombre de nucléons à la surface.

En assimilant le noyau à une goutte sphérique :

$$S = 4\pi r_{\circ}^{2} A^{\frac{2}{3}} \Rightarrow (\Delta B)_S = a_S A^{\frac{2}{3}}$$

L'énergie de surface doit être proportionnelle au nommbre de nucléons de la surface du noyau

$$(\Delta B)_S = a_S A^{\frac{2}{3}}$$

est très importante pour les noyaux légers.

3 Energie Coulombienne : Il faut tenir compte de l'interaction coulombienne entre les protons qui est répulsive. Son effet est de diminuer l'énergie de liaison par nucléon.
   - Pour Z petit l'interaction coulombienne est négligeable devant l'interaction nucléaire
   - Pour Z élevé l'interaction coulombienne devient plus importante car l'interaction électromagnétique est de portée infi nie.

Densité de charge

$$\rho = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Potentiel :

$$V = \frac{\rho}{r}.\frac{4}{3}\pi R^3$$

Charge :

$$dq = \rho.4\pi r^2 dr$$

$$E = \int V dq = \int \left(\rho.\frac{4}{3}\pi r^3\right)\left(\frac{\rho}{r}\right) 4\pi r^2 dr$$

$$E = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}Z^2$$

Z^2 donne le nombre d'interaction proton-proton y compris l'interaction d'un proton avec lui-même. Il faut remplacer Z^2 par $Z(Z-1)$ car un nucléon n'interagit qu'avec les $(Z-1)$ protons qui restent

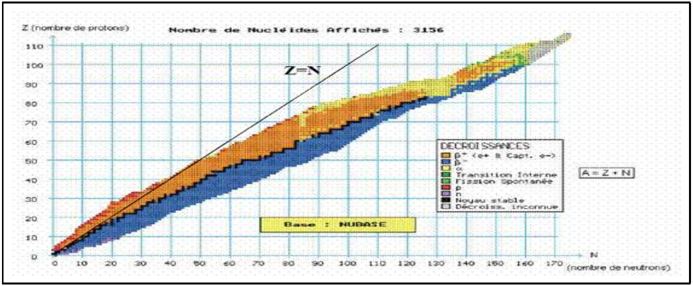
$$E = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R}Z(Z-1)$$

Pour Z grand $Z(Z-1)$ tend vers Z^2.
L'énergie coulombienne est donc proportionnelle à Z^2.

$$\Delta B_C = a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

$$a_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_\circ} = 0.7MeV$$

4 Energie d'asymétrie :



L'examen de la ligne de stabilité montre que les noyaux stables ont tendance à avoir $Z = N$. Cette relation est vérifiée pour les noyaux légers par contre pour les noyaux lourds on a $Z < N$ à cause de la répulsion coulombienne qui devient assez importante. Le terme d'asymétrie est de la forme :

$$a_a \frac{(N - Z)^2}{A}$$

L'ensemble de ces effets donne enfin la formule semi-empirique de Bethe et Weizsacker :

$$B(A,Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + \text{termes correctifs}$$

$$M(A,Z) = (A-Z)M_n + ZM_p - B(A,Z)$$

Valeurs numériques :

1. $a_v = 15.67 MeV$
2. $a_s = 17.23 MeV$
3. $a_a = 23.60 MeV$
4. $a_c = 0.70 MeV$

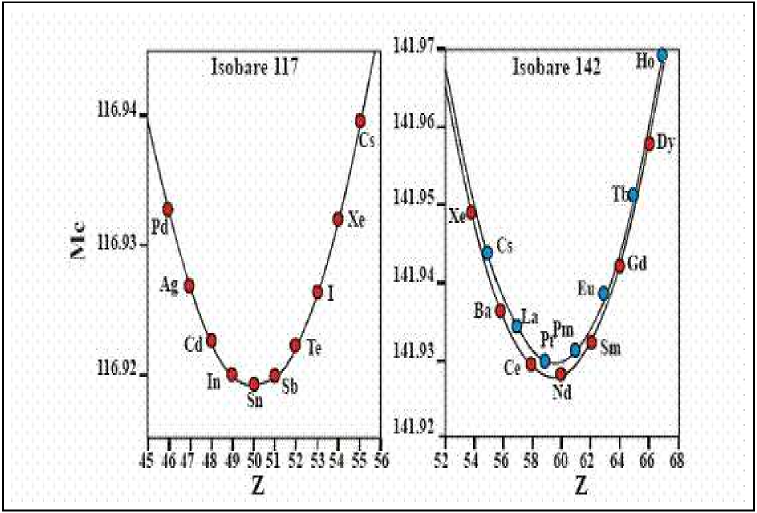
Notions de base

Energie d'appariement

L'énergie de liaison par nucléon $\frac{B}{A}$ présente des maximums pour un nombre de nucléons égal à 2, 4, 8, 20, 50, 82, 126. Le modèle de la goutte liquide ne peut pas rendre compte de cet effet car nous n'avons pas tenu compte du spin des nucléons. Nous pouvons corriger cet effet en rajoutant un terme correctif. On constate aussi que les noyaux pairs-pairs sont les plus abondants par contre les noyaux impairs-impairs sont les plus instables. Ce terme tient compte du fait que les nucléons du même type ont tendance à se coupler deux par deux dans un état de moment angulaire relatif nul.
La formule de Weiszacker est de la forme :

$$M(A,Z) = aZ^2 + bZ + c$$

c'est l'équation d'une parabole, a, b, c ne dépendent pas du nombre de masse A.
Pour les noyaux dont le nombre de masse est impair on a : $\delta = 0$



Le minimum de la parabole correspond à l'isobare le plus stable $(A, Z_\circ)$.

- Pour les isobares $(A, Z < Z_\circ)$ ces noyaux sont instables et se désintegrent par désintégration β^-.

$$\begin{array}{rcl} (A,Z) & \longrightarrow & (A,Z+1)+e^-+\bar{\nu}_e \\ n & \longrightarrow & p+e^-+\bar{\nu}_e \end{array}$$

- Pour les isobares $(A, Z > Z_\circ)$ ces noyaux sont instables et se désintegrent par désintégration β^+.

$$\begin{array}{rcl} (A,Z) & \longrightarrow & (A,Z-1)+e^++\nu_e \\ (A,Z)+e^- & \longrightarrow & (A,Z-1)+\nu_e \end{array}$$

Dans le cas des noyaux pairs on observe deux paraboles de masse :
Pour A pair : - Z pair et N pair : $\delta = -12A^{-\frac{1}{2}}$
Pour A pair : - Z impair et N impair : $\delta = +12A^{-\frac{1}{2}}$
Les deux paraboles expliquent l'éxistence du nombre plus important des noyaux pair-pair par rapport aux noyaux impair-impair.
Il n'existe réellement que quatre noyaux stables tous légers :
${}_1^2H, {}_3^6Li, {}_5^{10}B, {}_7^{14}N$
Il y a surstabilité des noyaux légers
Les noyaux pair-pair ont des énergies de liaison plus importante du fait que tous les nucléons sont appariés entre eux.
les noyaux impair-impair ont deux nucléons qui ne sont pas appariés.

Les gaz rares c'est à dire les éléments qui ont des couches totalement remplies ont des potentiels d'ionisation élevés :
$Z = 2, 10, 18, 36, 54, 86$
Le même phénomène est observé pour les noyaux ayant un nombre de protons ou de neutrons voisins de :
$Z \text{ou} N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$ Les noyaux ayant Z ou N égal à ces nombres sont appelés : Noyaux magiques. l'énergie de séparation du neutron ou du proton non apparié est :

$$S_n(A,Z) = [M(A-1,Z)+m_n]c^2 - M(A,Z)c^2 = B(A,Z) - B(A-1,Z)$$

$$S_p = B(A,Z) - B(A-1,Z-1)$$

S_n et S_p présente des irrégularités quand on est proche des noyaux magiques.

Notions de base

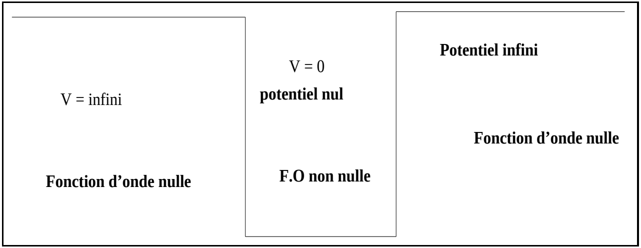
Modèle du gaz de Fermi

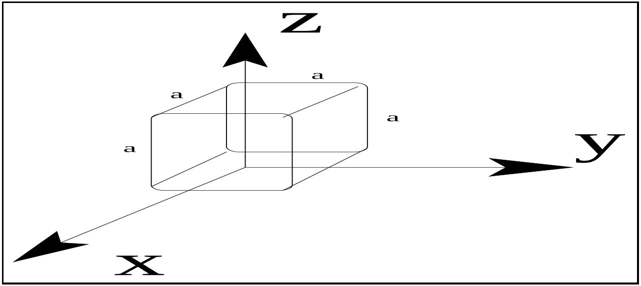
Ce modèle permet d'éxaminer les grosses propriétés de la dynamique nucléaire en négligeant certains détails tels que l'interaction nucléon-nucléon. On peut obtenit ainsi : la valeur du potentiel nucléaire et l'énergie moyenne des nucléons. Dans ce modl̀e on considère que :

- Les potentiels sont indépendants, on ne tient pas compte des interactions nucléon-nucléon
- Les particules sont soumises à un potentiel en puits rectangulaire p̀aroies finies
- l'extension de ce puits doit être supérieur à la longueur d'onde d'un nucléon (A très grand $\Rightarrow$ R $> r_\circ$.

On peut remplacer le potentiel nucléaire à symétrie sphérique par une boite cubique de côté a. On cherhce les états stationnaires d'un nucléon enfermé dans cette boite.

$$V = \Omega = a^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_\circ^3 A$$


V = infini
Fonction d'onde nulle
V = 0
potentiel nul
F.O non nulle
Potentiel infini
Fonction d'onde nulle


Z
a
a
a
a
Y
X

$$\frac{\Omega}{A} = \frac{4}{3}\pi r_\circ^3 \Rightarrow \frac{A}{\Omega} = \frac{3}{4\pi r_\circ^3} = 0.17\text{nucléon}/fm^3$$

le côté de la boite cubique est $a \approx A^{\frac{1}{3}}$
Les particules ne peuvent pas sortir de la boite, on considère que vers les bords de ce puits on a des forces très attractives. Cette boite peut être considérée comme un potentiel à trois dimensions. Soit $\psi(x, y, z)$: fonction d'onde d'un nucléon dans cette boite.
$\psi(x, y, z)$ satisfait à l'équation de Schrodinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = E\psi$$

Par séparation des variables :

$$\psi(x,y,z) = \psi_x(x).\psi_y(y).\psi_z(z)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) = 0$$

$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ k est le vecteur d'onde $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ $p = \hbar k$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_x(x) + k_x^2\psi_x(x) = 0 \Rightarrow \psi_x(x) = A_x \sin(k_x x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi_y(y) + k_y^2\psi_y(y) = 0 \Rightarrow \psi_y(y) = A_y \sin(k_y y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_z(z) + k_z^2\psi_z(z) = 0 \Rightarrow \psi_z(z) = A_z \sin(k_z z)$$

Pour que le nucléon reste à l'intérieur du puits de potentiel c'est à dire pour que ψ soit stationnaire il faut qu'elle vérifie les conditions de continuité aux bords. Pour

$$x = a, y = a, z = a \quad \text{On a} \quad \psi_i(a) = 0$$

$$k_x = n_x\pi, k_y = n_y\pi, k_z = n_z\pi \qquad k_i = n_i\frac{\pi}{a}$$

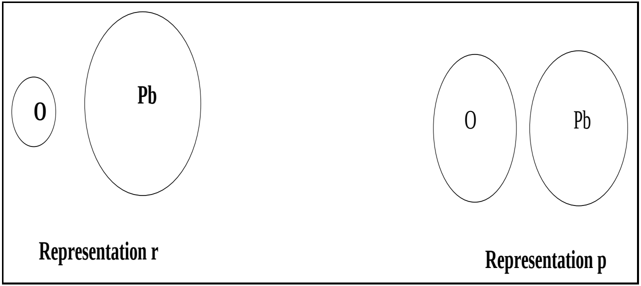
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)\frac{\pi^2}{a^2}$$

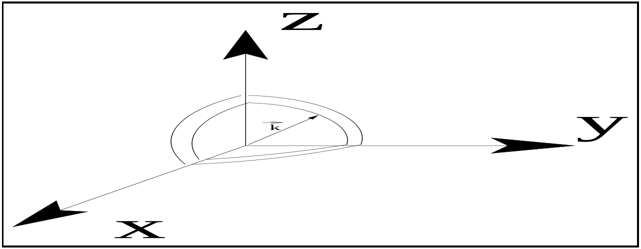
$$k_i = \frac{\pi}{a} \quad \text{dimension d'une cellule élémentaire}$$

$$k_i^3 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^3 \quad \text{Volume d'une cellule élémentaire}$$

Nombre d'états quantiques compris entre $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{dk}$

$$dN = \frac{1}{8}\left(\frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^3}\right)$$


O
Pb
O
Pb
Representation r
Representation p


z
y
x
k

$$\Omega = a^3 \qquad dN = \frac{4\pi k^2 dk \Omega}{8\pi^3}$$

$$p = \bar{k} \quad dN = \frac{\Omega 4\pi p^2 dp}{8\pi^3 \hbar^3} = \frac{\Omega 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

En représentation p le volume d'une cellule quantique élémentaire est : $(2\pi\hbar)^3 = h^3$

- Les nucléons (protons et neutrons) sont des fermions, chaque cellule quantique peut contenir deux fermions
- D'après le principe d'exclusion de Pauli, en tenant compte du spin et de la charge des nucléons, chaque état défini par $\overrightarrow{k}$ pourra être occupé par quatre nucléons, deux protons et deux neutrons de spins opposés

Le nombre total d'états nucléoniques est :

$$\frac{dN}{dk} = \frac{4\pi k^2 dk \Omega}{8\pi^3}$$

$$N = \int_0^{k_F} \frac{dN}{dk} dk = \frac{A}{4}$$

$$N = \int_0^{k_F} \frac{4\pi k^2 dk \Omega}{8\pi^3} dk = \frac{\Omega}{2\pi^2} . \frac{k_F^3}{3} = \frac{A}{4}$$

$$\frac{A}{\Omega} = \frac{2}{3\pi^2} . k_F^3$$

Or $\frac{A}{\Omega}$ est une constante universelle par conséquent k_F est une constante universelle.
k_F est le rayon de la sphère de Fermi il est le même pour tous les noyaux.

$$\rho = \frac{A}{\Omega} \approx 1.7x10^{38} \;\; \text{nucléons}/cm^3 0.17 \; fm^{-3}$$

$$0.17 = \frac{2}{3\pi^2} . k_F^3 \; fm^{-3} \;\; \Rightarrow \;\; k_F = 1.36 \; fm^{-1} \;\; \text{avec } \hbar = 6.582x10^{-22} \; Mev$$

Energie de Fermi :

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \approx 38MeV$$

ε_F est l'énergie maximale que peut avoir un nucléon dans son état fondamental. L'énergie totale du noyau est donnée par :

$$T = 4\int_0^{k_F} \frac{dN}{dk}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}dk = \frac{2\hbar^2\Omega}{2\pi^2 m}.\int_0^{k_F} k^4 dk$$

$$= \frac{2\hbar^2\Omega}{2\pi^2 m}\frac{k_F^5}{5} \quad \text{avec} \quad \frac{A}{\Omega} = \frac{2}{3\pi^2}k_F^3$$

$$T = \frac{3}{5}\frac{2}{3\pi^2}k_F^3.\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{3}{5}A\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{3}{5}A\varepsilon_F$$

L'énergie cinétique varie linéairement avec A.

$$\frac{T}{A} =< T >= \frac{3}{5}\varepsilon_F = 23MeV$$

$< T >$ est l'énergie cinétique moyenne par nucléon.
Energie potentielle :

$$-B = \sum_i T_i + \sum_{i<j} W_{ij}$$

$$\frac{B}{A} = 8MeV \quad \Rightarrow \quad -\frac{B}{A} = \frac{\sum_i T_i}{A} + \frac{\sum\limits_{i<j} W_{ij}}{A}$$

$$-8A = 23A + \sum_{i<j} W_{ij}$$

$$\frac{\sum\limits_{i<j} W_{ij}}{A} \approx -30MeV$$

Matière nucléaire

C'est un système idéal qui est infini dans toutes les directions de l'espace par conséquent :

- les effets de bords ne sont pas pris en compte
- le nombre de nucléons A est infini, l'énergie totale de liaison B l'est aussi, par contre $\frac{B}{A}$ est finie
- les effets coulombiens sont négligeables, seule l'interaction forte est prise en compte.
- A infini $\Rightarrow \quad N = Z$ pas d'effet d'appariement et de couches.

On aura donc : $\frac{B_{matNucl}}{A} = a_v = 15.67MeV \approx 16MeV$
Matière nucléaire :

$$-16A = 23A + \sum_{i<j} W_{ij} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i<j} W_{ij}}{A} \approx -39MeV$$

Energie potentielle :

$$\bar{W} = \frac{\sum_{i<j} W_{ij}}{A} = -30MeV$$

$$\sum_{i<j} W_{ij} = W_{12} + W_{13} + \quad .... + W_{1A} \tag{1}$$

$$+ W_{23} + \quad .... + W_{2A} \tag{2}$$

$$.................. \tag{3}$$

$$.................. \tag{4}$$

$$+ W_{A-1,A} = \frac{1}{2} \sum_{i} V_i \tag{5}$$

V_i Potentiel nucléaire auquel est soumis le nucléon i de la part des $(A-1)$ nucléons restants.

$$S_n = B(A,Z) - B(Z,A-1)$$

$$-B = \sum_{i=1} T_i + \sum_{i<j} W_{ij}$$

$$\begin{cases} B(A,Z) & = -\left(\sum_{i=1}^{A} T_i + \frac{1}{2}\sum_{i}^{A} V_i\right) \\ & = -\left(\sum_{i=1}^{A} T_i + \frac{1}{2}\sum_{i}^{A-1} V_i + V_F\right) \\ B(A-1,Z) & = -\left(\sum_{i=1}^{A-1} T_i + \frac{1}{2}\sum_{i}^{A-1} V_i\right) \end{cases} \tag{6}$$

$$S_n = B(A,Z) - B(A-1,Z) = -\varepsilon_F - V_F$$

$$\Rightarrow \quad V_F = -S_n - \varepsilon_F = -8 - 38 = -46MeV$$

Energie d'asymétrie

soit $\eta = \left(\frac{d\varepsilon}{dn}\right)_k$ l'énergie séparant deux niveaux voisins

$$\eta_F = \left(\frac{d\varepsilon}{dn}\right)_{k_F} = \left(\frac{d\varepsilon}{dk}\frac{dk}{dn}\right)_{k_F}$$

$$\frac{dn}{dk} = \frac{\Omega k^2}{2\pi^2} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\eta_F = \frac{2\hbar^2 k_F^2}{2m} . \frac{2\pi^2}{\Omega k_F^2} = \frac{2\hbar^2\pi^2}{\Omega m k_F}$$

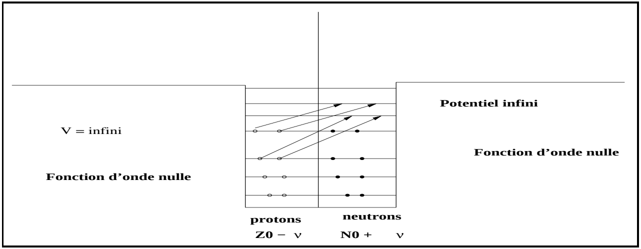
$$\frac{A}{\Omega} = \frac{2k_F^3}{3\pi^3} \quad \longrightarrow \quad \Omega k_F^3 = \frac{3\pi^3 A}{2}$$

$$\eta_F = \frac{2\hbar^2\pi^2 k_F^2}{\Omega m k_F^3} = \frac{4\hbar^2\pi^2 k_F^2}{3\pi^2 A m} = \frac{8}{3}\frac{\varepsilon_F}{A}$$

$$\eta_F = \frac{8\varepsilon_F}{3A}$$

η_F est l'énergie qui sépare deux niveaux voisins.

La séparation des niveaux d'énergie est inversement proportionnelle au nombre de masse A, plus le noyau est lourd plus les niveaux d'énergie seront de plus en plus serrés car la profondeur du puits de potentiel est la même pour tous les noyaux (46 MeV).



$$(N_\circ, Z_\circ) \quad \longrightarrow \quad (N_\circ + \nu, Z_\circ - \nu) \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{N - Z}{2}$$

$$E(N_\circ + \nu, Z_\circ - \nu) = E(N_\circ, Z_\circ) + \frac{\nu}{2}\nu\eta = E_\circ + \frac{1}{8}(N - Z)^2 \frac{8\varepsilon_F}{3A}$$

$$E(N_\circ+\nu,Z_\circ-\nu)=E_\circ+\frac{(N-Z)^2}{A}.\frac{\varepsilon_F}{3}$$

$$\frac{\varepsilon_F}{3}=\frac{38}{3}\approx 13MeV$$

$$E(N_\circ+\nu,Z_\circ-\nu)=E(N_\circ,Z_\circ)+\frac{a_a}{2}\frac{(N-Z)^2}{A}$$

ε_F est la différence d'énergie cinétique :

$$\sum_{i=1}^{Z,N}T_i-\sum_{i=1}^{Z_\circ,N_\circ}T_i=\frac{\varepsilon_F}{3}=\frac{a_a}{2}\frac{(N-Z)^2}{A}$$

$$-B(Z,N)=\sum T_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{Z,N}V_p(i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{Z,N}V_n(i)=\sum_i T_i+\frac{1}{2}\left(Z\bar{V_p}+N\bar{V_n}\right)$$

$$-B(Z_\circ,N_\circ)=\sum T_i+\frac{1}{2}\left(Z_\circ\bar{V_p}+N_\circ\bar{V_n}\right)$$

$$B(Z_\circ, N_\circ) - B(Z, N) = \sum_{i=1}^{Z,N} T_i - \sum^{Z_\circ, N_\circ} T_i + \frac{1}{2}\bar{V}_p\,(Z - Z_\circ) + \frac{1}{2}\bar{V}_n\,(N - N_\circ)$$

$$B(Z_\circ, N_\circ) - B(Z, N) = \sum_{i=1}^{Z,N} T_i - \sum^{Z_\circ, N_\circ} T_i + \frac{1}{2}\nu\left(\bar{V}_n - \bar{V}_p\right)$$

$\bar{V}_p$: potentiel moyen auquel sont soumis les protons.
$\bar{V}_n$: potentiel moyen auquel sont soumis les neutrons.

$$\bar{V}_n \neq \bar{V}_p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\nu\left(\bar{V}_n - \bar{V}_p\right) = \frac{1}{2}\nu V_a$$

est la moitié du terme d'énergie d'asymétrie

$$\begin{cases} \text{Liaison} \quad n-n : V_1 & \\ \text{Liaison} \quad p-p : V_1 & \\ \text{Liaison} \quad n-p : V_2 & \text{Les plus stables} \end{cases} \tag{7}$$

Nombre de liaisons n-p est égal à $Z.N$ pour $Z = N = \frac{A}{2}$ on a un nombre maximum de noyaux stables

$$\begin{cases} n-n : V_1 & \sum_N \quad \frac{N(N-1)}{2} V_1 = C_N^2 V_1 \\ p-p : V_1 & \sum_Z \quad \frac{Z(Z-1)}{2} V_1 = C_Z^2 V_1 \\ n-p : V_2 & \sum_{Z,N} \quad Z.NV_2 \\ & N = \frac{A}{2} + \nu \\ & Z = \frac{A}{2} - \nu \end{cases} \tag{8}$$

L'énergie potentielle totale de ces interactions :

$$\frac{V_1}{2}\left(\frac{A}{2}-\nu\right)\left(\frac{A}{2}-\nu-1\right)+\left(\frac{A}{2}+\nu\right)\left(\frac{A}{2}+\nu-1\right)+\left(\frac{A^2}{4}-\nu^2\right)V_2$$

$$\begin{aligned} E_p(Z,N) =& \frac{V_1}{2}\left[\frac{A^2}{4} + \nu^2 - 2\frac{A}{2}\nu - \frac{A}{2} + \nu + \frac{A^2}{4} + 2\frac{A}{2}\nu - \frac{A}{2} + \nu^2 - \nu\right] \\ & + \left(\frac{A^2}{4} - \nu^2\right) V_2 \\ =& \frac{A^2}{4}\left(V_1 + V_2\right) - \frac{A}{2}V_1 + \nu^2\left(V_1 - V_2\right) \quad \text{Pour (Z,N)} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{Pour} Z_\circ = N_\circ = \frac{A}{2} \;\Rightarrow\; E_p\left(Z_\circ, N_\circ\right) = \frac{A^2}{4}\left(V_1 + V_2\right) - \frac{A}{2}V_1$$

$$E_p(Z,N) - E_p(Z_\circ, N_\circ) = \frac{\left(N - Z\right)^2}{4}.\left(V_1 - V_2\right)$$

Cette expression donne la moitié manquante de l'énergie d'asymétrie.

Energie de surface

$$\psi(x,y,z) = A \sin k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

Avec $\psi(0) = 0$ pour $k_i = 0$ sur la surface
Il faut enlever les nucléons se trouvant sur la surface.

$$dn = \frac{1}{8}\frac{4\pi k^2 dk}{(\frac{\pi}{a})^3} - \frac{3}{4}\frac{2\pi k dk}{(\frac{\pi}{a})^2}$$

Surface du cube $6a^2 = S$

$$dn = \frac{\Omega k^2 dk}{2\pi^2} - \frac{Skdk}{4\pi} = \frac{\Omega k^2 dk}{2\pi^2}\left(1 - \frac{\pi}{2k}.\frac{S}{\Omega}\right)$$

$$\frac{E}{A} = \frac{4\int_0^{k_F} \frac{dn}{dk}\frac{\hbar^2 k^2}{2m}.dk}{4\int_0^{k_F} \frac{dn}{dk}.dk}$$

$$\frac{E}{A} = \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\int_0^{k_F} k^4\left(1-\frac{\pi}{2k}.\frac{S}{\Omega}\right)dk}{\int_0^{k_F} k^2\left(1-\frac{\pi}{2k}.\frac{S}{\Omega}\right)dk}$$

Supposons que $\frac{S}{\Omega}$ petit on pourra faire un développement limité.

$$\frac{E}{A} = \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{k_F^5}{5}-\frac{\pi}{2}\frac{k_F^4}{4}.\frac{S}{\Omega}\right)}{\left(\frac{k_F^3}{3}-\frac{\pi}{2}\frac{k_F^2}{2}.\frac{S}{\Omega}\right)}$$

$$\frac{E}{A} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{k_F^5}{5}-\frac{\pi}{2}\frac{k_F^4}{4}.\frac{S}{\Omega}\right)\left(\frac{k_F^3}{3}-\frac{\pi}{2}\frac{k_F^2}{2}.\frac{S}{\Omega}\right)^{-1}$$

$$\frac{E}{A} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3}{5}k_F^2-\frac{3}{8}k_F\frac{\pi S}{\Omega}\right)\left(1+\frac{3\pi}{4}\frac{1}{k_F}.\frac{S}{\Omega}\right)$$

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5}\varepsilon_F+\frac{3}{40}\frac{\pi S}{\Omega}.\frac{\varepsilon_F}{k_F}-.....0\left(\frac{S}{\Omega}\right)^2$$

$$\frac{S}{\Omega} = \frac{4\pi R^2}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{R} = \frac{3}{r_\circ A^{\frac{1}{3}}}$$

$$a_S = \frac{3}{40}\pi\frac{3}{r_\circ}\frac{1}{3}.\frac{\varepsilon_F}{k_F} = \frac{28.2}{61}.\frac{38}{A^{\frac{1}{3}}} = \frac{17.6}{A^{\frac{1}{3}}}MeV$$

$$r_\circ = 1.12fm \quad k_F = 1.36fm^{-1} \quad a_S = 17.6MeV$$

Valeur expérimentale : $= 17.23MeV$